

TD 09 – LIMITE D'UNE SUITE

Exercice 1 – Limites de référence et opérations (sans FI). Étudier les limites des suites suivantes.

- | | |
|--|---|
| 1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^3 + 2n - 9$ | 6) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^{-3} + n^5 + 6 + e^{-n}$ |
| 2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = -1 + \frac{1}{n^3} - \frac{6}{n}$ | 7) $\forall n \geq 2, u_n = \frac{2 + \frac{1}{\ln n}}{-1 + \frac{1}{n}}$ |
| 3) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3 - e^{2n}}$ | 8) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -n^3 - 3n^2 - 2n + 1$ |
| 4) $\forall n \geq 2, u_n = 2^n \left(-1 + \frac{3}{\sqrt{\ln(n)}} \right)$ | 9) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n} - 1$ |
| 5) $\forall n \geq 2, u_n = \frac{3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{(\ln n)^2 \times 5^n}$ | 10) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{-1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{e^{-n} + \frac{1}{n^2}}$ |

Exercice 2 – Limites de référence et opérations (avec FI). Étudier les limites des suites $(u_n)_{n \geq 2}$ suivantes.

- | | |
|--|--|
| 1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n+1}{1-4n}$ | 5) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n + (-1)^n}{2 + e^{-n} \ln(n)}$ |
| 2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{3^n}{n^2}$ | 6) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$ |
| 3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(n)}{n^2} + n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$ | 7) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$ |
| 4) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(3n)}{\sqrt{n}}$ | 8) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \quad (1 < b < a)$ |

Exercice 3 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{3 - u_n}.$$

1. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
 - (a) Expliquer pourquoi la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
 - (b) Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, au vu de la Question 1, que doit vérifier la limite ℓ ?
 - (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
 - (d) En déduire l'expression explicite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (e) En déduire l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (f) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Est-ce cohérent avec le résultat de la Question 2(b) ?

Exercice 4 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq 6$.
2. Montrer que cette suite est croissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie.
4. Déterminer la valeur de cette limite.
5. Déterminer le terme général de la suite. Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 5 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_1 = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 25.$$

En reprenant la méthode de l'exercice précédent, démontrer de deux manières différentes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel à déterminer.

Exercice 6 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^4.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. En déduire qu'il existe seulement que deux comportements possibles pour la convergence de la suite.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
4. Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$, alors nécessairement $\ell = 0$. (On pourra utiliser la relation de récurrence de la suite.)
5. À l'aide des deux questions précédentes, en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$.
6. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 7 – Théorème d'encadrement. Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{e^n}{n!}$$

1. Démontrer que,

$$\forall n \geq 2, \quad u_{n+1} \leq \frac{e}{3} u_n.$$

2. En déduire que,

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2.$$

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge vers 0.

Exercice 8 – Théorème d'encadrement. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2} ([x] + [2x] + \cdots + [nx])$$

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la partie entière de x , notée $[x]$, est l'unique entier vérifiant

$$x - 1 < [x] \leq x$$

1. Démontrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x(1 + 2 + \cdots + n) - n \leq [x] + [2x] + \cdots + [nx] \leq x(1 + 2 + \cdots + n)$$

2. En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{xn(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{xn(n+1)}{2n^2}$$

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel à déterminer.

Exercice 9 – Encadrement avec la valeur absolue. Montrer que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers 0 où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^n + 2}{n} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{(-1)^n(1+n)}{n^2}$$

Exercice 10 – Suites adjacentes. Démontrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes. En déduire que les deux suites sont convergentes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

Exercices supplémentaires

Exercice 11 – Considérons la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Démontrer que,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$$

2. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 12 – **Limite et suite récurrente.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Calculer la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$$

4. En déduire l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. Retrouver le résultat de la question 2.

Exercice 13 – **Limite et suite récurrente.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \prod_{k=0}^n (1 + e^{-k})$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3 .
2. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.
 - (a) Expliquer pourquoi la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
 - (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) \leq \frac{e}{e-1}$$

(On pourra utiliser que, pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.)

- (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 14 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3 .
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite (sans symbole somme) de $u_{n+1} - u_n$ à l'aide d'un changement d'indice.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.