

CHAPITRE 1 : LOGIQUE & RAISONNEMENT

Intro 1

I. PROPOSITIONS ET OPÉRATEURS

1. Premiers pas

**Définition 1** (Proposition). On appelle *proposition logique* toute phrase à laquelle on peut attribuer une valeur vraie (V) ou fausse (F). On appelle ces deux valeurs possibles des *booléens* (bool en Python).

- Exemples.**
- « 2 est un nombre pair » est une proposition vraie, « 2 est un nombre impair » est une proposition fausse.
  - « Cette proposition est fausse » n'est pas une proposition (pourquoi?).

**Définition 2.** Soient  $P, Q$  deux propositions. On définit les propositions « non  $P$  », « non  $Q$  », «  $P$  et  $Q$  », «  $P$  ou  $Q$  », «  $P$  implique  $Q$  » (noté  $P \Rightarrow Q$ ), «  $P$  est équivalente à  $Q$  » (noté  $P \Leftrightarrow Q$ ) par les valeurs de vérité suivantes :

P	Q	non P	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

« et », « ou », « implique », « est équivalent à » sont des **connecteurs logiques**.

*Remarque.* Commentaire sur le « ou » mathématique.

**Définition 3** (Condition nécessaire, condition suffisante). Pour deux propositions  $P$  et  $Q$  telles que  $P \Rightarrow Q$  on dit que  $P$  est une **condition suffisante** de  $Q$  et  $Q$  une **condition nécessaire** de  $P$ . Si  $P \Leftrightarrow Q$ , on dit que  $P$  est une **condition nécessaire et suffisante** de  $Q$ .

**Exemple.** Soit  $n$  un entier naturel. Que penser de  $P_1$  : «  $n$  est pair »,  $P_2$  : «  $n$  se termine par un 2 »,  $P_3$  : «  $n$  se termine par un 0, 2, 4, 6 ou 8 » ? Lesquelles de ces trois propositions sont des conditions nécessaires, suffisantes des autres ?

*Remarque.* Dans la langue courante, il y a souvent une notion de temps qui s'interpose. Dans la phrase « Pour réussir, il faut travailler », la condition nécessaire est .....  
 La condition suffisante est .....  
 L'implication est donc .....

**Exemple.** Soient  $x$  et  $y$  deux réels. Les implications suivantes sont-elles correctes ?

- $xy > 0 \Rightarrow (x > 0 \text{ et } y > 0)$
- $xy > 0 \Leftarrow (x > 0 \text{ et } y > 0)$

**Définition 4.** On dit que deux propositions  $P$  et  $Q$  sont **logiquement équivalentes** lorsqu'elles ont la même **table de vérité**, c'est-à-dire que  $P$  et  $Q$  valent V ou F en même temps.

**Exemple.** Montrer que pour toute proposition  $P$ ,  $P$  et non(non  $P$ ) sont logiquement équivalentes en dressant la table de vérité de non(non  $P$ ).

*Exercice.* Montrer que  $P \Leftrightarrow Q$  est logiquement équivalente à :  $(P \Rightarrow Q)$  et  $(P \Leftarrow Q)$

♥ **Propriété 5** (Une réécriture de  $P \Rightarrow Q$ ).  $P \Rightarrow Q$  est logiquement équivalente à (non  $P$ ) ou  $Q$

*Démonstration.*

P	Q	$P \Rightarrow Q$	non P	(non P) ou Q
V	V	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	F	V		

## 2. Réciproque et contraposée

**Définition 6.** On appelle **réciproque** de l'implication  $P \Rightarrow Q$  l'implication  $Q \Rightarrow P$   
On appelle **contraposée** de l'implication  $P \Rightarrow Q$  l'implication  $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ .

*Remarque.* La réciproque d'une implication n'a aucune raison d'être valable (comparer les tables de vérité)

En revanche, on a la propriété suivante :

**Propriété 7.** Pour toutes propositions  $P$  et  $Q$ , les propositions «  $P \Rightarrow Q$  » et «  $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$  » sont logiquement équivalentes.

♣ *Démonstration.* En établissant la table de vérité de  $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$

## 3. Négations

**Exemple.** Soit  $x$  un réel. La négation de «  $x > 0$  » est : « non  $(x > 0)$  ». Cette proposition est logiquement équivalente à la proposition (plus simple) : «  $x \leq 0$  »

*Remarque.* Première remarque : la négation inverse inégalités larges et strictes.

*Remarque.* Écrire la négation d'une proposition, c'est comme dire que la personne qui l'énonce ment. En français : quelle est la négation de « il fait chaud et beau » ?

*Exercice.* Établir la table de vérité de :  $P, Q, P \text{ et } Q, \text{non } (P \text{ et } Q), \text{non } P, \text{non } Q, \text{non } P \text{ et } \text{non } Q, \text{non } P \text{ ou } \text{non } Q$ .

♡ **Propriété 8** (Règles de de Morgan). Soient  $P, Q$  deux propositions.

- **non** ( $P \text{ et } Q$ ) est logiquement équivalente à **non**  $P$  **ou** **non**  $Q$
- **non** ( $P \text{ ou } Q$ ) est logiquement équivalente à **non**  $P$  **et** **non**  $Q$

♣ *Démonstration.* La deuxième propriété se démontre comme la première (laissé en exercice!)

♡ **Propriété 9** (Négation d'une implication). La négation de  $P \Rightarrow Q$  est :  $P \text{ et } \text{non } Q$ .

*Remarque.*  $\triangle$  En particulier, la négation d'une implication **n'est pas** une implication!

*Démonstration.* Deux démonstrations : en revenant aux tables de vérité, ou avec les règles de de Morgan et la réécriture de  $P \Rightarrow Q$ .

**Exemples.** Écrire la négation des propositions suivantes :

- Le quadrilatère  $ABCD$  est un rectangle ou un losange
- $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$
- Le réel  $x$  est entre 0 et 1 (au sens large)
- Si  $ABCD$  est un rectangle, alors c'est un carré.

## II. PREMIÈRES DÉMONSTRATIONS

### 1. Raisonner par implications, équivalences, doubles implications

**Montrer une implication :** Pour montrer l'implication  $P \Rightarrow Q$ , on **suppose** que  $P$  est vraie, et on **montre** que  $Q$  l'est.

**Exemple.** Pour un entier  $n$  quelconque, montrons l'implication «  $n$  est pair  $\Rightarrow n^2$  est pair »

*Remarque.* Attention! «  $P \Rightarrow Q$  » ne signifie pas que  $Q$  est vraie. En revanche, si  $P \Rightarrow Q$  **et**  $P$  sont vraies, alors  $Q$  l'est aussi.

**Propriété 10** (Transitivité). Montrer que si  $P \Rightarrow Q$  et  $Q \Rightarrow R$  sont vraies, alors  $P \Rightarrow R$  l'est.

*Il en va de même pour la relation d'équivalence.*

*Remarque.* On peut donc enchaîner les implications, les équivalences dans un raisonnement.

**Exemple** (Raisonnement par équivalences).  $x$  est un réel. Montrons l'équivalence :  $(4x + 7 = 2x - 1) \Leftrightarrow (x = -4)$

*Exercice.* Trouver l'erreur dans le raisonnement par équivalences suivant :

Soit  $x$  un réel supérieur à  $-6$ . Montrons l'équivalence :  $x = \sqrt{x+6} \iff (x=3) \text{ ou } (x=-2)$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x+6} \\ \iff x^2 &= x+6 \\ \iff x^2 - x - 6 &= 0 \\ \iff (x-3)(x+2) &= 0 \\ \iff x &= 3 \text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

On choisira parfois, par prudence ou par facilité, de montrer  $P \iff Q$  en montrant dans un premier temps  $P \Rightarrow Q$  et dans un second temps  $Q \Rightarrow P$

**Exemple.** Soit  $m$  un réel et  $f : x \mapsto mx + 1$ . Montrons : ( $f$  est constante)  $\iff (m = 0)$

## 2. Une variante : raisonner par analyse-synthèse

*Objectif :* trouver l'ensemble des éléments (nombres, suites, fonctions...) qui vérifient un certain nombre de conditions. S'utilise souvent pour montrer l'existence et l'unicité d'un objet, pour résoudre une équation classique ou une équation fonctionnelle.

**Exemple.** Trouver les réels  $x$  vérifiant l'équation :  $x = \sqrt{x+6}$

**Rédaction :** Résolvons cette équation par analyse-synthèse.

Analyse : soit  $n$  un entier vérifiant cette équation

Alors, (...) et donc  $n = 5$

Synthèse : Vérifions que  $n = 5$  est bien solution de cette équation.

(...)

Conclusion : L'unique solution de cette équation est  $n = 5$

*Exercice.* Chercher toutes les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant pour tous réels  $x$  et  $y$  :  $f(xy) = f(x)f(y) - 1$  en complétant le raisonnement suivant :

Analyse : Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant pour tous réels  $x$  et  $y$  : .....

En particulier, pour  $x = y = 1$ ,  $f(1 \times 1) = \dots\dots\dots$

On en déduit que  $f(1)$  vérifie l'équation : .....

Sans supposer désormais  $x = 1$ , on obtient pour tout  $x$  : .....

Synthèse : Soit  $f$  constante égale à ..... ou ..... Vérifions que pour tous  $x, y$  réels, on a effectivement :

.....  
 .....  
 .....

Ainsi,  $f$  est solution de cette équation.

## 3. Raisonner par l'absurde, par contraposée

*Remarque.* Pour **montrer une implication**, on montre parfois sa contraposée, qui a la même valeur de vérité.

♥ **Exemple.** Pour un entier  $n$ , montrer l'implication «  $n^2$  est impair  $\Rightarrow n$  est impair »

**Propriété 11.** Soit  $P$  une proposition. Si  $P \Rightarrow F$ , alors  $P$  est fautive.

*C'est le fondement du raisonnement par l'absurde. Pour montrer  $P$ , on montrera que non  $P$  est fautive, en montrant que non  $P$  implique des contradictions.*

**Rédaction :** Supposons par l'absurde que ( non  $P$  ). Alors, (...), ce qui est une contradiction. Ainsi, (  $P$  ).

**Exemple.** Irrationalité de  $\sqrt{2}$ , infinité des nombres premiers.

### 4. Raisonner par disjonction de cas

**Rédaction :** Montrons par disjonction de cas que (...)

Cas 1 : (...) (...)

Cas 2 : (...) (...)

△ Vérifier que les différents cas forment bien l'ensemble de toutes les possibilités! Par exemple :  $x > 0$  et  $x < 0$  ne forment pas une partition satisfaisante.

**Exemple** (Un exemple étonnant). Il existe deux nombre irrationnels  $a$  et  $b$  tels que  $a^b$  soit rationnel.

*Exercice.* Soit  $n$  un entier. Montrer par disjonction de cas que  $n(n + 1)$  est divisible par 2.

## III. QUANTIFICATEURS

### 1. Des propositions quantifiées

♠ **Définition 12.** On appelle **prédicat** une proposition dont la valeur de vérité dépend d'une (ou plusieurs) variable(s)

**Exemples.**

- $P_1(n) : n$  est pair
- $P_2(x) : x > 0$
- $P_3(x, y) : x^2 + y^2 = 1$

$P_1, P_2, P_3$  ne sont ni vraies ni fausses, en revanche  $P_1(2)$  est vraie,  $P_2(-1)$  est fausse et  $P_3(x, y)$  est vraie pour tous les points de coordonnées  $(x, y)$  du cercle unité

*Remarque.* Par exemple, la propriété «  $4(x + 1) = 4x + 4$  » n'a pas de sens, on ne sait pas qui est  $x$ ! Ce qu'on veut dire quand on écrit cette égalité c'est : **quelle que soit la valeur de  $x$** ,  $4(x + 1) = 4x + 4$ . Cette égalité n'a pas du tout le même sens que lorsqu'on écrit «  $2x + 1 = 3x - 2$  », dans laquelle on **cherche une valeur** de  $x$  qui rende l'égalité vraie.

Pour créer une proposition à partir d'un prédicat, on utilise un **quantificateur** : on précise de quelle variable on parle. Dans ce qui suit,  $E$  est un ensemble ( $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \dots$ )

#### a. Quantificateur existentiel

**Définition 13.** Le quantificateur existentiel, lu « il existe », est représenté par le symbole  $\exists$ .

$P : \langle \exists x \in E, P(x) \rangle$  est vraie si au moins un élément  $x$  de  $E$  rend  $P(x)$  vraie. Dans cette phrase, la virgule se lit « tel(le) que »

**Exemples.** La proposition  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$  est vraie car  $x = 2$  convient. Cette valeur de  $x$  est-elle la seule qui convienne?

*Remarque.* • On précise toujours l'ensemble d'appartenance de la variable quantifiée : par exemple, «  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$  » et pas «  $\forall x, x^2 \geq 0$  »

- Dans la proposition «  $\exists x \in E, P(x)$  », la variable  $x$  est dite « muette » : on aurait pu aussi bien définir  $P : \exists y \in E, P(y)$
- Quantificateur d'existence et d'unicité (« il existe un unique », représenté par le symbole  $\exists!$ )
- Si  $E$  est l'ensemble vide (sans élément), toute proposition de la forme  $\forall x \in E, P(x)$  est vraie.
- On peut considérer le quantificateur existentiel comme une généralisation du connecteur logique « ou » et le quantificateur universel comme une généralisation du « et »
- △ Les symboles  $\exists$  et  $\forall$  sont à proscrire comme raccourcis de langage. On n'écrira pas « La propriété est vraie  $\forall x \in \mathbb{R}$  » : on sépare phrases et énoncés mathématiques formels.

**Exemple.** La proposition  $\exists! x \in [0; 1], x(1 - x) \geq \frac{1}{4}$  est vraie car .....

#### b. Quantificateur universel

**Définition 14.** Le quantificateur universel, lu « quel que soit » ou « pour tout », est représenté par le symbole  $\forall$ .

$P : \langle \forall x \in E, P(x) \rangle$  est vraie si n'importe quel  $x$  de  $E$  rend  $P(x)$  vraie

**Exemple.** •  $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x^2 > 0$  signifie .....

- Écrire avec des quantificateurs la proposition : « le produit de 0 et de n'importe quel nombre réel est nul » : .....

c. Démontrer une propriété universelle

**Rédaction :** Soit  $x \in E$ . (...) Donc  $P(x)$ .  
Ainsi :  $\forall x \in E, P(x)$

**Exemple.** Montrer :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 2x + 5 = 2y + 5 \Rightarrow x = y$

*Remarque.* Pour montrer « il existe  $x$  tel que (...) », c'est à la fois plus simple et plus compliqué : **il suffit** de trouver **un**  $x$  qui convient. Il faut alors faire preuve de créativité pour en trouver un !

**2. Enchaînement de quantificateurs et négation**

♡ **Propriété 15.** Pour tout prédicat  $P(x)$  défini sur  $E$ ,

- la négation de «  $\exists x \in E, P(x)$  » est .....
- la négation de «  $\forall x \in E, P(x)$  » est .....

*Remarque.* L'ordre des quantificateurs dans une phrase est important.

♡ **Exemple.** Comparer les propositions

$$P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$$

$$P_2 : \exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x < n + 1$$

*Remarque.* En revanche, deux quantificateurs existentiels ou deux quantificateurs universels à la suite peuvent être intervertis.

**IV. ENTIERS ET RÉCURRENCES**

Dans cette section, on s'intéresse aux prédicats définis sur l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels.

a. Propriété héréditaire

**Définition 16.** On appelle propriété **héréditaire** un prédicat  $P(n)$  défini sur  $\mathbb{N}$  vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n + 1)$  (c'est-à-dire qu'il se transmet à l'entier suivant)

*Exercice.* Montrer que pour tout réel strictement positif  $x$ , la propriété  $P(n) : (1 + x)^n \geq 1 + nx$  est héréditaire.

b. Démonstration par récurrence

♠ **Définition 17** (Axiomes de Peano - pour les fans de théorie). On peut **définir l'ensemble**  $\mathbb{N}$  avec les propriétés suivantes :

- $\mathbb{N}$  a un élément noté 0
- Tous les éléments  $n$  de  $\mathbb{N}$  ont un successeur, noté  $s(n)$ , qui n'est pas 0
- Deux éléments qui ont le même successeur sont égaux
- (Principe de récurrence) Tout sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  qui contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments est  $\mathbb{N}$  tout entier

**Théorème 18** (Principe de récurrence - admis). Si un prédicat  $P(n)$  défini sur  $\mathbb{N}$  vérifie

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}, P(n_0)$
- $\forall n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n + 1)$

alors

$$\forall n \geq n_0, P(n)$$

**Deux ingrédients essentiels pour une bonne récurrence :**

- Une propriété à montrer **pour tout entier**
- Une **relation de récurrence** : lien entre un terme et le suivant.

**Rédaction :** Raisonnons par récurrence.

Ou : montrons par récurrence que pour tout  $n$  (...) ou posons pour tout  $n$  la proposition  $\mathcal{P}(n) : (\dots)$  et montrons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n$

Initialisation : pour  $n = \dots, (\dots)$

Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $(\mathcal{P}(n))$   
(...)

Ainsi,  $(\mathcal{P}(n+1))$

Conclusion : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(\mathcal{P}(n))$

- Remarque (Variantes).
- On appelle **récurrence double** une récurrence effectuée sur la propriété  $Q(n) : \ll P(n) \text{ et } P(n+1) \gg$ .  
Utile si on a une relation entre  $n+2$  d'un côté et les deux termes  $n$  et  $n+1$  de l'autre. Se généralise à une récurrence triple, ...
  - On appelle **récurrence forte** une récurrence effectuée sur la propriété  $R(n) : \ll \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n \Rightarrow P(k) \gg$   
Utile si on a une relation entre  $n$  et tous les entiers plus petits, **ou** entre  $n$  et **un** entier plus petit variable.
  - On pourra alors commencer sa rédaction par « Montrons par récurrence double/forte la propriété ... »

### ♥ Exemples.

- On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ . Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \sqrt{n}$
- On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(u_0 + \dots + u_n)$ . Montrer par récurrence forte que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 1$

### Résumé des modes de raisonnement étudiés :

- Reasonner par *modus ponens* (déduction directe)
- Reasonner par équivalences, par double implication
- Reasonner par l'absurde
- Reasonner par contraposition
- Reasonner par analyse-synthèse
- Reasonner par disjonction de cas
- Reasonner par récurrence

Pour chacun de ces modes de raisonnement, il vous est demandé de connaître un ou deux exemples d'application, de comprendre dans quels cas ces modes de raisonnement s'appliquent, de savoir les identifier et **rédigé** correctement.