Devoir Maison n°2

Exercice 1 - Étude de fonction

On introduit les fonctions définies par : $f : x \mapsto e^{-x} \ln(1+e^x)$ et $g : x \mapsto \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$. On définit f sur $\mathbb{R}$ et g sur $\mathbb{R}_+$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$
3. (a) Dresser le tableau de variations complet de g sur $\mathbb{R}_+$
   (b) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}_+$
4. Calculer f' et l'exprimer en fonction de g. *On admet pour le moment que f est dérivable.*
5. On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. En déduire la limite de f en $-\infty$.
6. Montrer que pour tout réel x, $\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$. En déduire la limite de f en $+\infty$. f admet-elle une asymptote en $+\infty$?
7. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
8. Dessiner l'allure de la courbe en précisant les éventuelles asymptotes ainsi que la tangente en 0. *On pourra admettre :* $\ln(2) \simeq 0.69$
9. (a) En étudiant la fonction $h : x \mapsto f(x) - x$, montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$
   (b) Vérifier : $\alpha > 0$
10. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ une expression de $f(x) + f'(x)$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $-\ln(2) \leq f'(x) \leq 0$

Exercice 2 - Produits

On cherche à montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \prod_{k=1}^{n} (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$$

1. <u>Méthode 1 :</u> justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{n+1} \prod\limits_{k=1}^{n+1} (2k-1) = 2(2n+1) \times 2^n \times \prod\limits_{k=1}^{n} (2k-1)$ puis conclure par récurrence.
2. <u>Méthode 2 :</u> Exprimer plus simplement $\times \prod\limits_{k=1}^{n} (2k-1) \times \prod\limits_{k=1}^{n} (2k)$ *(on pourra commencer par les premières valeurs de n)* puis conclure sans récurrence.