

Feuille d'exercices n°1

Connecteurs, implications, tables de vérité

Exercice 1 (Distributivité). Montrer que pour toutes propositions P, Q, R , les propositions

- P et (Q ou R)
- (P et Q) ou (P ou R)

sont équivalentes. En va-t-il de même pour « P ou (Q et R)» et «(P ou Q) et (P et R)» ?

◇ **Exercice 2.** Trouver des propositions P, Q telles que :

1. $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$
 2. $P \Rightarrow Q$ mais $Q \Rightarrow P$ est faux
 3. $P \Rightarrow Q$ est faux et $Q \Rightarrow P$ est faux
- P, Q, R peuvent concerner des réels, des entiers, des points du plan, de l'espace, ...

◇ **Exercice 3** (Implications). Compléter par \Leftarrow, \Rightarrow ou \Leftrightarrow . Dans les phrases suivantes, x, y sont des réels, A, B, C, D des points du plan

1. $x^2 = \frac{1}{16} \dots\dots\dots x = \frac{1}{4}$
2. $x > 0$ et $y > 0 \dots\dots\dots xy > 0$
3. ABCD n'est pas un rectangle $\dots\dots\dots$ ABCD n'est pas un carré
4. ABC est un triangle rectangle $\dots\dots\dots AB^2 = AC^2 + CB^2$

Exercice 4 (Comprendre les valeurs de vérité de l'implication). On note pour tout n entier : $\mathcal{D}_2(n)$ la proposition n est divisible par 2 et $\mathcal{D}_5(n)$ la proposition n est divisible par 5. Pour quels entiers n a-t-on : $\mathcal{D}_2(n) \Rightarrow \mathcal{D}_5(n)$?

Quantificateurs

Exercice 5 (Traduire en quantificateurs - nombres réels ou entiers). On notera dans la suite n un entier relatif et x un réel quelconque. Traduire en propositions quantifiées les phrases suivantes :

1. x est un nombre rationnel
2. n est un nombre premier
3. n est plus petit que tous les nombres réels au carré
4. x est compris entre deux entiers consécutifs

◇ **Exercice 6** (Traduire en quantificateurs - suites). On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Traduire en propositions quantifiées les phrases suivantes :

1. (u_n) est croissante
2. (u_n) est strictement croissante à partir d'un certain rang
3. (u_n) est constante

Exercice 7 (Quantificateurs, négations). Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Que signifient les assertions suivantes sur la fonction f ?

(a) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = y$	(d) $\exists x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \leq f(x_0)$
(b) $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$	(e) $\forall x \in I, -x \in I$ et $f(-x) = f(x)$
(c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$	(f) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$

2. Écrire la négation des assertions précédentes.

Premières démonstrations

◇ **Exercice 8.** Soient a et b deux réels.

1. Montrer que si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b est irrationnel
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9 (Analyse-synthèse : exemples). Déterminer :

1. Les solutions de l'équation $\sqrt{2-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
2. Les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$

Exercice 10 (Analyse-synthèse). Montrer par analyse-synthèse que pour toute fonction f définie sur \mathbb{R} , il existe des fonctions g, h uniques vérifiant les trois propriétés :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = g(x)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = -h(x)$

Exercice 11 (Disjonction de cas : une justification). Montrer que pour trois propositions A, B, C , « $(A \text{ ou } B) \Rightarrow C$ » est équivalente à « $(A \Rightarrow C) \text{ et } (B \Rightarrow C)$ »

On pourra le justifier par une table de vérité, ou en le rédigeant par double implication.

Exercice 12 (Disjonction de cas). Montrer par disjonction de cas que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + n^2$ est pair

◇ **Exercice 13.** Soient n_1, \dots, n_9 des entiers naturels vérifiant $n_1 + \dots + n_9 = 90$. Montrer qu'il existe trois de ces entiers dont la somme est supérieure ou égale à 30

Réurrences

Exercice 14 (Une propriété étonnante). Que pensez-vous de la démonstration ci-dessous ?

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété : « $\mathcal{P}(n)$: pour tous n points du plan, ces points appartiennent à une même droite»

Initialisation : Pour $n = 1$, la propriété est évidente

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

Soient M_1, M_2, \dots, M_{n+1} des points du plan. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe une droite (d_1) contenant M_1, \dots, M_n . De même, il existe une droite (d_2) contenant M_2, \dots, M_{n+1} . Comme (d_1) et (d_2) ont $n-1$ points en commun, elles sont confondues. Ainsi, M_1, \dots, M_{n+1} sont alignés et la propriété est héréditaire.

Exercice 15 (Démonstrations par récurrence). Montrer par récurrence les propriétés suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \geq n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2n} + 2$ est un multiple de 3.
3. $\forall n \geq 2, 3^n \geq n^2$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 16 (Suite de Fibonacci). On considère la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

1. Résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. On note α la plus grande solution et β la plus petite
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$

Exercice 17 (Comparaison de suites). Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq 1 \times \dots \times n \leq n^n$

◇ **Exercice 18** (Une autre suite récurrente). Soit (u_n) définie par $u_1 = 1, u_2 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$$

En calculant les premiers termes de la suite (u_n) , conjecturer une formule générale pour le terme de rang n de la suite, puis démontrer cette formule par récurrence double.

Exercice 19. Montrer par récurrence forte que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ est le produit de nombre(s) premier(s) et de 1.