Infinité de nombres premiers - démonstration

Il existe une infinité de nombres premiers.
Rappels : un entier naturel est premier si il admet pour seuls deux diviseurs 1 et lui-même. Tout entier supérieur ou égal à 2 est divisible au moins par un nombre premier.

Démonstration

Par l'absurde, supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers. On notera n ce nombre et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les nombres premiers dans l'ordre croissant.
Remarque : pour aboutir à une contradiction, on va chercher un nombre premier qui ne soit pas dans cette liste...
Posons $N = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$.

- Puisque $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ est supérieur à 1 (il y a au moins 2 dans la liste des nombres premiers et les autres sont plus grands), alors $N \geq 2$.
- Ainsi, N a au moins un diviseur premier p. Montrons que p n'est pas dans la liste $p_1, \ldots, p_n$.
- Pour tout i allant de 1 à n, $N = p_i \times (p_1 \ldots p_{i-1} \times p_{i+1} \ldots p_n) + 1$. Ainsi, le reste dans la division euclidienne de N par p_i est 1 : N n'est pas divisible par p_i, et donc p_i est différent de p.

On conclut que N est divisible par un entier p premier qui n'est pas dans la liste $p_1, \ldots, p_n$: c'est une **contradiction** avec l'hypothèse que $p_1, \ldots, p_n$ soient tous les nombres premiers !
Remarque : ce n'est pas N lui-même qui est premier, en tout cas pas nécessairement.

Ce qu'on peut/qu'il faut retenir

1. Le résultat est important pour la culture mathématique mais pas dans le cadre de notre programme, dans lequel nous ne ferons pas d'arithmétique.
2. C'est un exemple classique de démonstration par l'absurde !

Infinité de nombres premiers - démonstration

Il existe une infinité de nombres premiers.
Rappels : un entier naturel est premier si il admet pour seuls deux diviseurs 1 et lui-même. Tout entier supérieur ou égal à 2 est divisible au moins par un nombre premier.

Démonstration

Par l'absurde, supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers. On notera n ce nombre et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les nombres premiers dans l'ordre croissant.
Remarque : pour aboutir à une contradiction, on va chercher un nombre premier qui ne soit pas dans cette liste...
Posons $N = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$.

- Puisque $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ est supérieur à 1 (il y a au moins 2 dans la liste des nombres premiers et les autres sont plus grands), alors $N \geq 2$.
- Ainsi, N a au moins un diviseur premier p. Montrons que p n'est pas dans la liste $p_1, \ldots, p_n$.
- Pour tout i allant de 1 à n, $N = p_i \times (p_1 \ldots p_{i-1} \times p_{i+1} \ldots p_n) + 1$. Ainsi, le reste dans la division euclidienne de N par p_i est 1 : N n'est pas divisible par p_i, et donc p_i est différent de p.

On conclut que N est divisible par un entier p premier qui n'est pas dans la liste $p_1, \ldots, p_n$: c'est une **contradiction** avec l'hypothèse que $p_1, \ldots, p_n$ soient tous les nombres premiers !
Remarque : ce n'est pas N lui-même qui est premier, en tout cas pas nécessairement.

Ce qu'on peut/qu'il faut retenir

1. Le résultat est important pour la culture mathématique mais pas dans le cadre de notre programme, dans lequel nous ne ferons pas d'arithmétique.
2. C'est un exemple classique de démonstration par l'absurde !