

Feuilles d'exercices n°1

Exercice 1 (Distributivité). Montrer que pour toutes propositions P, Q, R , les propositions

- P et $(Q$ ou $R)$
- $(P$ et $Q)$ ou $(P$ et $R)$

sont équivalentes.

P	Q	R	Q ou R	P et $(Q$ ou $R)$	P et Q	P et R	$(P$ et $Q)$ ou $(P$ et $R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

En va-t-il de même pour « P ou $(Q$ et $R)$ » et « $(P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$ » ?

La réponse est oui, ça marche pareil. Faire les colonnes : P, Q, R, Q et R, P ou $(Q$ et $R), P$ ou Q, P ou $R, (P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$

Exercice 5 (Traduire en quantificateurs - nombres réels ou entiers). On notera dans la suite n un entier relatif et x un réel quelconque. Traduire en propositions quantifiées les phrases suivantes :

- x est un nombre rationnel $\exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}^*, x = \frac{p}{q}$
- n est un nombre premier $n \neq 1$ et $\forall p, q \in \mathbb{N}, n = pq \Rightarrow (p = 1 \text{ ou } q = 1)$
- n est plus petit que tous les nombres réels au carré $\forall x \in \mathbb{R}, n \leq x^2$
- x est compris entre deux entiers consécutifs $\exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$ (*l'énoncé n'est pas clair sur le fait que les inégalités soient larges ou strictes*)

Exercice 9 (Analyse-synthèse : exemples). Déterminer :

- Les solutions de l'équation $\sqrt{2-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
Analyse : Soit x tel que $\sqrt{2-x} = x$. Alors en mettant l'équation au carré : $2-x = x^2$ et donc $x^2 + x - 2 = 0$.
On résout cette équation en $x = -2$ **ou** $x = 1$
Synthèse : pour $x = -2$, on obtient $\sqrt{2+2} = 2 \neq -2$. En revanche pour $x = 1$, $\sqrt{1} = 1$ et 1 est bien solution de l'équation.
Conclusion : la seule solution de l'équation est $x = 1$
- Les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$
Analyse : Soit f une fonction vérifiant cette propriété. Alors pour $x = y = 0$, on obtient : $f(0)^2 - f(0) = 0$. $f(0)$ est une solution de l'équation $a^2 - a = 0$, c'est-à-dire : $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$
Pour tout x , avec $y = 0$, on obtient : $f(0)f(x) - f(0) = x$. Si par l'absurde, $f(0) = 0$, on déduit que pour tout réel $x, x = 0$, ce qui est une contradiction. Ainsi, $f(0) = 1$ et on résout en $f(x) = x + 1$
Synthèse : Soit $f : x \mapsto x + 1$, soient x, y deux réels. Alors, $f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - (xy+1) = xy + x + y + 1 - xy - 1 = x + y$. f est bien solution de l'équation.
Conclusion : La seule fonction solution de cette équation fonctionnelle est $x \mapsto x + 1$

Exercice 10 (Analyse-synthèse). Montrer par analyse-synthèse que pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, il existe des fonctions g, h uniques vérifiant les trois propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = g(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = -h(x)$

Soit f une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}$

Analyse : Soient g, h des fonctions vérifiant les trois propriétés. On a alors pour tout réel x :

$$\begin{cases} f(x) &= g(x) + h(x) \\ f(-x) &= g(-x) + h(-x) \end{cases}$$

On utilise les propriétés $g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$ pour obtenir :

$$\begin{cases} f(x) &= g(x) + h(x) \\ f(-x) &= g(x) - h(x) \end{cases}$$

On résout ce système en : $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

Synthèse : Soient $g : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1. g(x) + h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$$

$$2. g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x)$$

$$3. h(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x)$$

g et h vérifient bien les trois propriétés demandées (g est paire, h est impaire, $f = g + h$)

Exercice 11. Montrer que pour trois propositions A, B, C , « $(A \text{ ou } B) \Rightarrow C$ » est équivalente à « $(A \Rightarrow C)$ et $(B \Rightarrow C)$ »

A	B	C	$A \text{ ou } B$	$(A \text{ ou } B) \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow C)$	$(B \Rightarrow C)$	$(A \Rightarrow C) \text{ et } (B \Rightarrow C)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

Exercice 17 (Comparaison de suites). Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \leq 1 \times \dots \times n \leq n^n$

On rédigera pour plus de facilité deux récurrences séparées. Je mets ici les hérédités seulement, initialisations et conclusions à savoir rédiger.

Hérédité 1 : Soit n tel que $2^{n-1} \leq 1 \times \dots \times n$

Alors, $2^n \leq 2 \times 1 \times 2 \times \dots \times n$. Si $n \geq 1$, alors $2 \leq n+1$ et en multipliant par $1 \times 2 \times \dots \times n$ qui est positif, on obtient :

$$2 \times 1 \times 2 \times \dots \times n \leq 1 \times 2 \times \dots \times n \times (n+1)$$

Par transitivité, $2^n \leq 1 \times \dots \times n \times (n+1)$ et la récurrence est établie.

Hérédité 2 : Soit n tel que $1 \times 2 \times \dots \times n \leq n^n$

Alors, $1 \times 2 \times \dots \times n \times (n+1) \leq n^n \times (n+1)$

Par ailleurs, $(n+1)^{n+1} = (n+1) \times (n+1)^n = (n+1)n^n \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq (n+1)n^n$.

On conclut : $(n+1)^{n+1} \geq 1 \times 2 \times \dots \times n \times (n+1)$ et la récurrence est établie.

Exercice 19. Montrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 2$ est le produit de nombre(s) premier(s).

Initialisation : 2 est un nombre premier, il s'écrit bien comme un produit de nombres premiers.

Hérédité : Soit n tel que tout entier k inférieur à n soit le produit de nombres premiers.

Raisonnons par disjonction de cas pour montrer que $n+1$ est un produit de nombres premiers :

-
- Si $n + 1$ est premier, alors $n + 1$ s'écrit comme produit de nombres premiers (un seul facteur dans le produit)
 - Si $n + 1$ n'est pas premier, alors il existe p, q différents de 1 et de $n + 1$ tels que $n + 1 = pq$. En particulier, $p \leq n$ et $q \leq n$. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe des nombres premiers $p_1, \dots, p_r$ et $q_1, \dots, q_s$ tels que $p = p_1 p_2 \dots p_r$ et $q = q_1 q_2 \dots q_s$. Ainsi : $n + 1 = p_1 p_2 \dots p_r q_1 q_2 \dots q_s$ qui est un produit de nombres premiers.

La récurrence est établie.

Conclusion : tout entier supérieur ou égal à 2 est un produit de nombres premiers.