

Feuille d'exercices n°2

Manipulation d'ensembles

Exercice 1. Écrire sous une des formes du cours les ensembles :

1. des entiers naturels divisibles par 7
2. des sommes de deux carrés d'entiers
3. des nombres rationnels qui possèdent un antécédent par la fonction $x \mapsto e^x + x$

◇ **Exercice 2** (Revoir les définitions). Soient $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2\}$.
Lister les éléments de $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$ et $\mathcal{P}(A)$.

Exercice 3. Lesquelles des écritures suivantes désignent-elles le même ensemble ?

- | | |
|---|---|
| 1. $\{x^2 + 1 x \in \mathbb{R}\}$ | 6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 x > y\} \cup \{(x, x) x \in \mathbb{R}\}$ |
| 2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 x \geq y\}$ | 7. $\{y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2 + 1\}$ |
| 3. $\{n \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}, n = 3k\}$ | 8. $[1; +\infty[$ |
| 4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 x > y\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 x = y\}$ | 9. l'ensemble des entiers relatifs divisibles par 3 |
| 5. $\{3k k \in \mathbb{Z}\}$ | 10. \emptyset |

◇ **Exercice 4** (Différence symétrique). Soient A, B deux parties d'un ensemble E et $D = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Montrer que $D = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Indications : on rappelle que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, on pourra commencer par faire un dessin pour intuitiver la réponse, puis utiliser la distributivité. Une alternative est de rédiger par double inclusion.

Exercice 5. Représenter graphiquement les sous-ensembles de \mathbb{R}^2 définis par $A = [-1; 1] \times \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z} \times [2; +\infty[$ et $C = A \cap B$ et donner des exemples d'éléments de chacun de ces ensembles.

♡ **Exercice 6.** Soient A, B, C trois parties d'un ensemble fini. Exprimer $|A \cup B \cup C|$ en fonction de $|A|, |B|, |C|$ et de cardinaux d'intersections de A, B, C

Injectivité, surjectivité, images et antécédents

Exercice 7. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ou aucun des deux ?

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $f : [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x + 1 $ | 2. $g : [-3; 3] \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 - 3 $ | 3. $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$
$(p, q) \mapsto \frac{p}{q}$ |
|--|--|--|

Exercice 8. Soient E, F des sous ensembles de \mathbb{R} , et $f : E \rightarrow F$ la fonction carré. Déterminer E et F tels que

- | | |
|---|---|
| 1. f soit injective mais pas surjective | 3. f soit injective et surjective |
| 2. f soit surjective mais pas injective | 4. f ne soit ni injective ni surjective |

Exercice 9. Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ deux fonctions.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
3. En déduire que si $G = E, g \circ f = id_F$ et $f \circ g = id_E$, alors f et g sont bijectives.
4. A-t-on dans le premier cas g nécessairement injective ? et f surjective dans le deuxième ? Le montrer, ou donner un contre-exemple (patatoïde)

◇ **Exercice 10** (Fonction réciproque - avec une candidate). Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
 $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$

1. Déterminer $f \circ f$
2. Montrer que f est bijective

Exercice 11 (Fonction réciproque - algébriquement). Soit $A = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{3}\}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{2x+1}{3x+7}$

Déterminer $f(A)$, montrer que $f : A \rightarrow f(A)$ est bijective, et trouver une formule explicite pour f^{-1}

♠ **Exercice 12** (Préimage). Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Pour $B \in \mathcal{F}$, on appelle **préimage** de B , notée $f^{-1}(B)$ l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

1. Soit $y \in F$. Comment appelle-t-on les éléments de $f^{-1}(\{y\})$?
2. Soient B_1, B_2 deux parties de F . Montrer que $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
3. Montrer que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Remarque : c'est une notation, on ne suppose pas ici que f est bijective !

Exercice 13 (Composition itérée). Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Déterminer $f \circ f \circ \dots \circ f(x)$ (où le symbole f apparaît n fois) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et de $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que cette composition est bien définie (sur quel ensemble de définition ?).

Cardinaux, dénombrements, coefficients binômiaux

♡ **Exercice 14.** Soient E, F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et m .

1. Déterminer le nombre d'applications de E dans F puis le nombre de bijections de E dans F
2. Si $n = m$, en déduire une inégalité démontrée dans la feuille précédente
3. Dans une course cycliste à 10 participant-es, combien y a-t-il d'ordres d'arrivée possibles ?

◇ **Exercice 15** (Lemme des tiroirs).

1. En raisonnant par contraposition, justifier la phrase «Si $n + 1$ paires de chaussettes sont rangées dans n tiroirs, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins deux paires»
2. Soit $\{x_1, \dots, x_{10}\}$ une partie de $[[1; 100]]$. Montrer qu'on peut en extraire deux sous ensembles (disjoints et non vides) ayant la même somme

◇ **Exercice 16.** Déterminer le nombre d'anagrammes (sans tenir compte du sens) des mots : Maths, Anglais, Anagramme.

Exercice 17 (Factorielle). Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier

1. $(n + 1)! - n!$
2. $\frac{(n+3)!}{n!}$

Exercice 18 (Des propriétés des coefficients binômiaux).

1. Montrer : $\forall k, p, n \in \mathbb{N}, \binom{n}{p} \binom{p}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$ (interprétation combinatoire ?)
2. Pour quelles valeurs de $n, p \in \mathbb{N}$ a-t-on $\binom{n}{p} < \binom{n}{p+1}$?
3. Pour quelles valeurs de $n, p, q \in \mathbb{N}$ a-t-on $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$?

Exercice 19. En utilisant la formule explicite des coefficients binômiaux, montrer que si n est un entier, tout produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$

♠ **Exercice 20.** Soit E un ensemble (pas nécessairement fini). Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'application surjective $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$

Indication : considérer l'ensemble $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$