Intro 2

Chapitre 2 : Ensembles & Applications

I. Une petite théorie des ensembles

1. Définitions

a. Éléments

Définition 1. Un ensemble E est une collection d'objets (nombres, couples de nombres, points, fonctions, autres ensembles, ...). Pour un objet x, on note $x \in E$ la proposition « x appartient à E » et $x \notin E$ sa négation.

Exemples.
- On appelle **singletons** les ensembles à un élément : par exemple $\{2\}$ est un singleton. On différencie le singleton de l'élément qu'il contient : $2 \in \{2\}$
- Ensembles de nombres $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$($\mathbb{C}$ pour les expert·e·s). $-3 \in \mathbb{Z}$; $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$; $\frac{5}{11} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- Un même élément peut appartenir à plusieurs ensembles : $-1 \in \mathbb{Z}$ mais aussi $-1 \in \mathbb{Q}, -1 \in \mathbb{R}$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $[|1;n|]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n
- $F = \{x^2 | x \in \mathbb{R}\}$ est une notation pour « l'ensemble des x^2, où x est un nombre réel ».
  F est en fait l'ensemble des ....

Définition 2 (Ensemble vide)**.** Il existe un ensemble noté $\varnothing$ qui ne contient aucun élément

b. Inclusions, égalité d'ensembles

Définition 3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble E est **inclus dans** un ensemble F, noté $E \subset F$, si :

$$\forall x \in E, x \in F$$

Exercice. Quelle est la négation de $E \subset F$? (notée en général $E \not\subset F$)

Exemples.
- $\{1;3;5\} \subset \{1;3;4;5;7\} \subset \mathbb{N}$
- $\{3;5\} \not\subset \{1;3\}$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}, n \leqslant m \Rightarrow [1;n] \subset [1;m]$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Exercice (Montrer une inclusion : rédaction)**.** Montrer que $\{4k+1 | k \in \mathbb{N}\} \subset \{2j+1 | j \in \mathbb{N}\}$

Définition 4 (Égalité d'ensembles)**.** Deux ensembles E et F sont dit égaux (on note $E = F$) si $E \subset F$ et $F \subset E$

Remarque. On retiendra le lien entre inclusion et implication, et entre égalité d'ensembles et équivalence de propositions logiques ($x \in E \Leftrightarrow x \in F$)

♣ *Exercice* (Théorique)**.** Montrer qu'il existe un seul ensemble vide (c'est-à-dire que deux ensembles vides sont égaux)

Remarque. Il n'y a pas de notion d'ordre dans l'écriture des éléments d'un ensemble : $\{1;3\} = \{3;1\}$. Pas de « doublon » non plus.

2. Parties d'un ensemble

a. Sous-ensembles

Définition 5.
- Si $F \subset E$, on dit que F est un **sous-ensemble** ou une **partie** de E
- On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E

Exercice. Soit $E = \{0\}$. Déterminer $\mathscr{P}(E)$, puis $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$
Déterminer $\mathscr{P}(\{0;1;2\})$

Propriété 6 (Ensemble défini par compréhension - admis)**.** Étant donné un prédicat $P(\cdot)$ défini sur E, on peut définir $F = \{x \in E | P(x)\}$ l'ensemble des x de E tels que $P(x)$ soit vérifié.

Exemples.
- $2\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$
- $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} | p \text{ est premier}\}$
- $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0\}$

Remarque. Ainsi, à partir d'un prédicat, on peut définir un sous-ensemble. On peut également définir un prédicat à partir d'un ensemble F par :

$$P(x) : x \in F$$

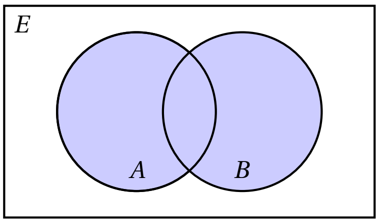
La plupart des concepts du chapitre 1 sur les propositions logiques se traduisent alors en terme d'ensembles

b. Opérations

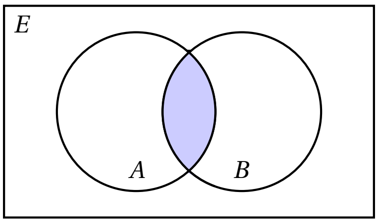
Définition 7. Dans ce qui suit, A et B sont des parties d'un ensemble E. On définit :

- l'union : $A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- l'intersection : $A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$
- le complémentaire $\overline{A}$ de A dans E par : $\overline{A} = \{x \in E, x \notin A\}$. En cas d'ambigüité sur l'ensemble E, on notera $\complement_E A$ (recommandation du programme) ou $E \backslash A$ (comme dans la notation « $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ »)

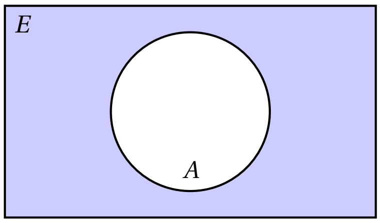
Exemple. $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres ....



$A \cup B$



$A \cap B$



$\overline{A}$

Propriété 8. Dans ce qui suit, E est un ensemble

- $\forall A \in \mathscr{P}(E), A \subset A$ et $\varnothing \subset A$
- $\forall A, B \in \mathscr{P}(E), A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
- $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E), A \subset B$ et $B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- (distributivité) $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

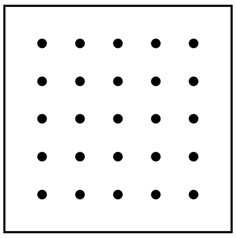
Démonstration. En appliquant les propriétés de logique du premier chapitre.
♣ Il faut aussi savoir visualiser sur un dessin

3. Ensembles produits

Définition 9 (Produit cartésien)**.** Soient A, B deux ensembles (cette fois non supposés parties d'un plus grand ensemble). On définit :

$$A \times B = \{(a, b) \quad | \quad a \in A, b \in B\}$$

Exemple. L'ensemble $A = [|1;5|] \times [|1;5|]$ est l'ensemble des paires (n, m) d'entiers inférieurs à 5 : par exemple $(3;2) \in A, (-1;7) \notin A$



A

Notation. Pour un ensemble E, on notera E^2 pour $E \times E$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $E^n := \underbrace{E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$

Exemple. $\mathbb{R}^2$ est représenté graphiquement par le plan cartésien, $\mathbb{R}^3$ l'espace (qui peuvent être vus selon le contexte comme ensembles de points ou de vecteurs)

II. Applications

1. Définition

♠ **Définition 10** (Correspondance)**.** Pour deux ensembles E, F, on appelle **correspondance** une partie $C \subset E \times F$. On dira alors que x et y sont en correspondance si $(x, y) \in C$

Définition 11 (Application - un cas particulier des correspondances)**.** On dira que f est une **application** de E vers F si on peut lui associer un ensemble $A \subset E \times F$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in A$$

Pour chaque $x \in E$, on notera alors $f(x)$ cette unique valeur de y, appelée image de x par f. On dit que x est **un** antécédent de y. A est le **graphe** de l'application. E est **l'ensemble de définition** de f et F **l'ensemble d'arrivée**.

Remarque. Une correspondance c'est donc le fait d'associer à chaque élément de E zéro, un, ou plusieurs éléments de F. Pour une application, on associe à chaque $x \in E$ exactement une seule image. Un élément de F, en revanche, peut avoir zéro, un, ou plusieurs antécédents. **Toujours dire *l'*image et *un* antécédent**.

Exemples.

- Si E est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$, on retrouve la notion de fonction. Par exemple :

$$f_1 : \begin{array}{ccc}]0;1[& \longrightarrow &]1;+\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

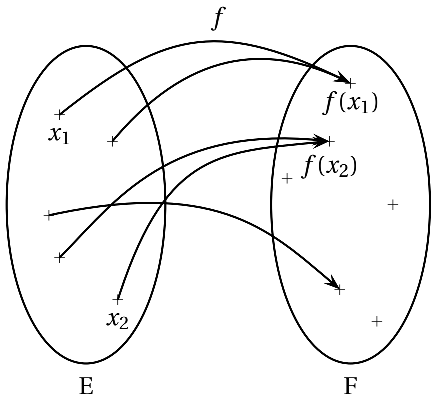
  Par f_1, l'image de $\frac{1}{2}$ est ....

- Si $E = \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{R}$, une application de E dans F est une suite. Par exemple :

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \sqrt{n} \end{array}$$

  Par f_2, un antécédent de 3 est .... Est-ce le seul ? Que peut-on dire des antécédents de $\frac{1}{2}$?

- Les transformations géométriques sont des applications du plan. Les applications linéaires (voir plus tard dans l'année). Application « initiale ». **Application « identité »** d'un ensemble E.
- Exemple patatoïde



2. Bijections

a. Applications injectives et surjectives

♡ **Définition 12.** Soient E, F deux ensembles et f une application de E vers F

- f est dite **injective** si

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

- f est dite **surjective** si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

Exercice. Écrire la définition quantifiée de « f n'est pas injective » et de « f n'est pas surjective »

Exemple. Soit f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} [-1;1] & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

f est surjective mais pas injective

- Pour montrer que f **est injective**, on prend x, x' quelconques tels que $f(x) = f(x')$ et on montre que $x = x'$.
- Pour montrer que f **n'est pas injective**, on **trouve** $x \neq x'$ tels que $f(x) = f(x')$

♣ *Exercice.* Les exemples f_1 et f_2 de la section précédente sont-elles injectives ? surjectives ?

Définition 13 (Ensemble image)**.** Soit f définie de E dans F. On appelle **ensemble image** de E par f l'ensemble :

$$f(E) = \{y \in F | \exists x \in E, y = f(x)\}$$

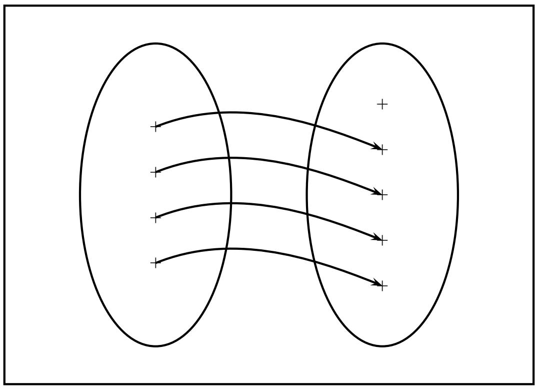
Remarque (Une autre façon de définir un ensemble). On peut aussi noter $f(A)$ sous la forme : $\{f(x) | x \in E\}$

Exemples.

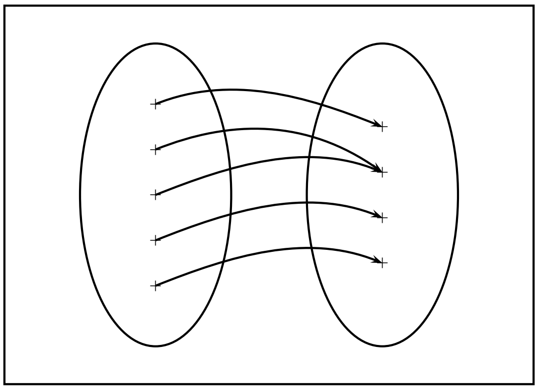
- $\{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2\} = \{x^2 | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+$
- $\{n \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\} = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}$
- $\{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R}, y = 2x - 1\} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
- $\{k^2 | k \in \mathbb{N}\} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Propriété 14. $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est bien définie et toujours surjective

Démonstration. Par construction



Application injective *(mais pas surjective)*



Application surjective *(mais pas injective)*

Remarque (Reformulations). Chaque élément de F a **au moins** un antécédent par une application f surjective, et **au plus** un antécédent par une application f injective.

b. Applications bijectives et leurs applications réciproques

Définition 15. On dit que f est **bijective** lorsqu'elle est à la fois injective et surjective : chaque élément de F a **exactement un** antécédent par f.

Propriété 16. Si $f : E \longrightarrow F$ est bijective, alors il existe une application $g : F \longrightarrow E$ appelée **réciproque** de la bijection f, telle que

$$\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \Longrightarrow x = g(y)$$

On note alors f^{-1} cette application réciproque.

♠ *Démonstration.* Non exigible. L'idée : on associe à chaque élément y dans F son unique antécédent dans E.

Réciproquement, si une telle application existe, alors f est bijective (voir ex. 9 du TD)

Exemple. Si $E = F = \mathbb{R}^+$, alors $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective et sa réciproque est $g : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

3. Composition d'applications

a. Définition

Définition 17. Soient E, F, G des ensembles et $f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow G$ des applications. On définit la composée $g \circ f$ par

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Remarque. Dans le cas général, on ne peut pas définir $f \circ g$. Savoir justifier que $g \circ f$ est définie.

♡ **Exemple.** Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & 1+x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$. $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies et :

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (f \circ g)(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (g \circ f)(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b. Compatibilité avec injectivité, surjectivité

Propriété 18. Soient E, F, G des ensembles et $f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow G$ des applications.

1. Si f, g injectives alors $g \circ f$ est injective
2. Si f, g surjectives alors $g \circ f$ est surjective
3. Si f est bijective, de réciproque f^{-1}, alors $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$ où $id_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

Démonstration.

III. Le cas des ensembles finis

1. Cardinal

a. Existence, définition

Définition 19 (Ensemble fini)**.** On dit qu'un ensemble E est fini si il existe $n \in \mathbb{N}$ et $f : [|1; n|] \longrightarrow E$ bijective.

Propriété 20 (Unicité du cardinal, admise)**.** Si E est fini, alors ce n est unique, et on l'appelle cardinal de E, noté $|E|$ ou $\mathrm{card}(E)$

Exemple. Un ensemble de cardinal 4 : $\{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}$

b. Opérations

Soit E un ensemble fini, $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathscr{P}(E)$ et $f : A \longrightarrow B$

Propriété 21. Si f est injective, alors $|A| \leqslant |B|$. Si f est surjective, alors $|A| \geqslant |B|$

♡ **Propriété 22.**

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Démonstration. Idée de preuve avec des dessins.

Propriété 23. Soit deux ensembles E, F.

$$|E \times F| = |E| \times |F|$$

2. Dénombrements classiques

a. Cardinal de $\mathscr{P}(E)$

Propriété 24. Si E est un ensemble de cardinal n, alors $\mathscr{P}(E)$ est fini et $|\mathscr{P}(E)| = 2^n$

Démonstration.

b. Nombre de parties à k éléments

Définition 25 (Coefficients binômiaux)**.** Soit E un ensemble à n éléments et $k \in \mathbb{N}$. On appelle **coefficient binômial** le nombre $\binom{n}{k}$ de parties de E à k éléments.

Exemples. $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{n}, \binom{4}{2}$

Remarque. Une partie de E a moins d'éléments que E. Pour tous k, n entiers : $k > n \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$. On restreint alors parfois la définition à $k \in [|0, n|]$

Propriété 26 (Relation avec $n-k$)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, k \in [|0; n|], \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

♣ *Démonstration.* Passage au complémentaire

Exemple. En déduire pour tout entier n une formule simplifiée de $\binom{n}{n-1}$

Propriété 27 (Relation de récurrence)**.**

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Démonstration. Disjonction de cas.

Remarque. Triangle de Pascal. Bien comprendre le **sens** combinatoire de cette égalité !

Définition 28 (Factorielle)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **factorielle** de n le nombre

$$n! := 1 \times 2 \times \ldots \times n$$

Remarque. Par convention, $0! = 1$

♡ **Propriété 29** (Formule explicite)**.** Soient $n \in \mathbb{N}, k \in [|0; n|]$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times \ldots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

♡ *Démonstration.* Par récurrence

Propriété 30 (avec n/p)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, p \in [|0; n|], \binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}$$

Démonstration.

c. Nombre d'applications, de bijections

Laissé en exercice de TD