Devoir Maison n°1

Exercice 1 - Quantificateurs

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On considère les quatre énoncés mathématiques suivants :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ et $g(x) = 0$
4. $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$

Montrer que les propositions 1 et 2 ne sont pas équivalentes, puis que les propositions 3 et 4 ne sont pas équivalentes.

Pour chacun des cas, on proposera un contre exemple sous la forme d'un couple f, g de fonctions. On pourra les définir par une expression algébrique ou proposer une représentation graphique. Expliquez sur votre copie la construction de vos contre-exemples (comment les trouver ? qu'est-ce que ces fonctions ont de spécial ?)
Puisqu'il faut proposer un contre exemple, il n'y a pas ***une*** *bonne réponse, plusieurs exemples sont possibles. Je propose un jeu d'exemples ci-dessous, ça ne veut pas dire que les vôtres sont faux si ils sont différents.*

- La proposition 2 se traduit en au moins une des deux fonctions f, g est la fonction nulle. Cette proposition implique la proposition 1. En revanche, il est possible de construire deux fonctions qui vérifient la proposition 1 mais pas la 2. Il faut alors trouver deux fonctions f, g dont l'une au moins est nulle en chaque réel, mais aucune n'est identiquement nulle. Je propose :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  f et g vérifient bien la proposition 1. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ et si $x < 0, g(x) = 0$. En revanche, f et g ne vérifient pas la proposition 2 puisqu'aucune des deux n'est identiquement nulle (par exemple, $f(-1) = g(1) = 1 \neq 0$). On en conclut que **les deux propositions ne sont pas équivalentes.**

- Ici, la proposition 3 signifie que les deux fonctions s'annulent **en un même point** alors que la proposition 4 signifie que les deux fonctions s'annulent **chacune** au moins une fois, pas nécessairement pour un même x. La proposition 3 implique la proposition 4. En revanche, il est possible de construire deux fonctions f, g qui vérifient la proposition 4 mais pas la 3. On cherche deux fonctions f, g qui s'annulent mais pas en un même point. Je propose :

$$f : x \mapsto x \quad ; \quad g : x \mapsto x - 1$$

  La fonction f s'annule en 0, la fonction g s'annule en 1, donc f et g vérifient la proposition 4, mais elles n'ont pas d'antécédent **commun** à 0 : elles ne vérifient pas la proposition 3. Ainsi, **les deux propositions ne sont pas équivalentes.**

Racines et puissances

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe **des entiers** a_n, b_n, c_n, d_n tels que $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}$.
Écrire un système d'équations permettant d'exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n, d_n
Raisonnons par récurrence.
Initialisation : pour $n = 0$, $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^0 = 1 = 1+0\sqrt{2}+0\sqrt{3}+0\sqrt{6}$. La propriété est initialisée, avec $a_0 = 1, b_0 = c_0 = d_0 = 0$
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe a_n, b_n, c_n, d_n vérifiant l'égalité demandée. On a alors :

$$\begin{aligned}
(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{n+1} &= (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} + \sqrt{3})^n \\
&= (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \times (a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= a_n\sqrt{2} + b_n\sqrt{2}\sqrt{2} + c_n\sqrt{3}\sqrt{2} + d_n\sqrt{6}\sqrt{2} + a_n\sqrt{3} + b_n\sqrt{2}\sqrt{3} + c_n\sqrt{3}\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}\sqrt{3} \\
&= 2b_n + 3c_n + a_n\sqrt{2} + a_n\sqrt{3} + (b_n + c_n)\sqrt{6} + d_n\sqrt{12} + d_n\sqrt{18}
\end{aligned}$$

Or, $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$ et $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{n+1} &= (2b_n + 3c_n) + a_n\sqrt{2} + a_n\sqrt{3} + (b_n + c_n)\sqrt{6} + 3d_n\sqrt{2} + 2d_n\sqrt{3} \\
&= (2b_n + 3c_n) + (a_n + 3d_n)\sqrt{2} + (a_n + 2d_n)\sqrt{3} + (b_n + c_n)\sqrt{6}
\end{aligned}$$

La récurrence est établie avec les coefficients :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{n+1} & = & 2b_n & + & 3c_n \\ b_{n+1} & = & a_n & + & 3d_n \\ c_{n+1} & = & a_n & + & 2d_n \\ d_{n+1} & = & b_n & + & c_n \end{array}\right.$$

qui sont bien entiers puisque a_n, b_n, c_n, d_n le sont.