Réciproque d'une application bijective

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Alors il y a une équivalence entre

1. f est bijective
2. Il existe $g : F \to E$ telle que :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \iff x = g(y)$$

Démonstration

Par double implication :

- $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Soit f une fonction bijective. Soit $y \in F$. Par définition de la bijectivité, il existe un unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Notons $g(y) := x$. Alors :
  - g est bien définie sur F, à valeurs dans E
  - Pour tous $x \in E, y \in F$, si $x = g(y)$ alors $y = f(x)$ par défintion de $g(y)$ et réciproquement si $y = f(x)$, alors x est un antécédent de y par f et par unicité, $x = g(y)$.
- $\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Soient f, g vérifiant la condition 2. Montrons que f est bijective.
  - **Surjectivité :** soit $y \in F$. Posons $x = g(y)$. Alors, d'après la propriété 2, $y = f(x)$. Ainsi, y admet un antécédent : f est surjective.
  - **Injectivité :** soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Posons $y \in F$ cette image commune. Alors, d'après la propriété 2, $y = f(x) \Rightarrow x = g(y)$ et $y = f(x') \Rightarrow x' = g(y)$. On en conclut : $x = g(y) = x'$ et donc f est injective.
  - On conclut que f est bijective.

Ce qu'on peut/qu'il faut retenir

1. Le résultat ! Qui sert à la fois à pouvoir introduire f^{-1} quand f est bijective et à montrer que f est bijective en trouvant sa réciproque.
2. Les étapes de la démonstration sont des cas typiques de : équivalence montrée par double implication, utilisation d'une équivalence, démonstration de surjectivité et d'injectivité.

Réciproque d'une application bijective

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Alors il y a une équivalence entre

1. f est bijective
2. Il existe $g : F \to E$ telle que :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \iff x = g(y)$$

Démonstration

Par double implication :

- $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Soit f une fonction bijective. Soit $y \in F$. Par définition de la bijectivité, il existe un unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Notons $g(y) := x$. Alors :
  - g est bien définie sur F, à valeurs dans E
  - Pour tous $x \in E, y \in F$, si $x = g(y)$ alors $y = f(x)$ par défintion de $g(y)$ et réciproquement si $y = f(x)$, alors x est un antécédent de y par f et par unicité, $x = g(y)$.
- $\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Soient f, g vérifiant la condition 2. Montrons que f est bijective.
  - **Surjectivité :** soit $y \in F$. Posons $x = g(y)$. Alors, d'après la propriété 2, $y = f(x)$. Ainsi, y admet un antécédent : f est surjective.
  - **Injectivité :** soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Posons $y \in F$ cette image commune. Alors, d'après la propriété 2, $y = f(x) \Rightarrow x = g(y)$ et $y = f(x') \Rightarrow x' = g(y)$. On en conclut : $x = g(y) = x'$ et donc f est injective.
  - On conclut que f est bijective.

Ce qu'on peut/qu'il faut retenir

1. Le résultat ! Qui sert à la fois à pouvoir introduire f^{-1} quand f est bijective et à montrer que f est bijective en trouvant sa réciproque.
2. Les étapes de la démonstration sont des cas typiques de : équivalence montrée par double implication, utilisation d'une équivalence, démonstration de surjectivité et d'injectivité.