

CHAPITRE 3 : SOMMES, PRODUITS

Intro 3

I. NOTATIONS ET MANIPULATIONS

1. Notations

Notation. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et $u_1, \dots, u_n$ des réels.

• On note $\sum_{i=1}^n u_i := u_1 + \dots + u_n$

• On note $\prod_{i=1}^n u_i := u_1 \times \dots \times u_n$

Définition 1 (Définition formelle). Soit $u_1, u_2, \dots$ une suite de réels. On définit par récurrence :

$$\sum_{i=1}^0 u_i = 0, \quad \prod_{i=1}^0 u_i = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} :$$

• $\sum_{i=1}^{n+1} u_i = \left(\sum_{i=1}^n u_i \right) + u_{n+1}$

• $\prod_{i=1}^{n+1} u_i = \left(\prod_{i=1}^n u_i \right) \times u_{n+1}$

Remarque. Cette définition est très pratique pour démontrer des propriétés sur les sommes ou produits par récurrence.

Exemple. Écrire sous une forme plus compacte le calcul : $1 + 3 + 5 + \dots + 99$

• On peut aussi généraliser le symbole à un ensemble d'indices quelconques : si I est un ensemble **fini** et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels, on note $\sum_{i \in I} u_i$ la somme des u_i .

• La variable i est une variable **muette**, qui naît et meurt avec l'écriture de la somme et n'a donc aucun sens en dehors. On peut utiliser une autre lettre (k souvent) mais pas n ici (n a déjà été déclaré plus haut) !

Remarque. $\triangle! i + \sum_{i=1}^n i^2$ nexiste pas. Que vaut $\sum_{i=1}^n n$?

• Si $n = 0$, $\sum_{k=1}^n u_k = 0$ et $\prod_{k=1}^n u_k = 1$

• On peut utiliser la même notation pour d'autres opérations, ensemblistes notamment : $\bigcup_{k=1}^n E_k, \bigcap_{k=1}^n E_k$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. Écrire sous la forme d'une formule fermée :

• $\sum_{i=1}^n x =$

• $\prod_{k=1}^n x =$

2. Propriétés

Toutes les propriétés de la somme et du produit peuvent alors se reformuler sous une forme plus compacte.

♥ **Propriété 2** (Commutativité, associativité, distributivité). Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}, (v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux familles de réels et $n \in \mathbb{N}$.

• $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) + u_{n+1}$

• $\sum_{k=1}^n (u_k + v_k) = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j$

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=1}^n u_k$

• $\prod_{k=1}^{n+1} u_k = \left(\prod_{k=1}^n u_k \right) \times u_{n+1}$

• $\prod_{k=1}^n (u_k v_k) = \prod_{i=1}^n u_i \times \prod_{j=1}^n v_j$

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \prod_{k=1}^n (\lambda u_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^n u_k$

Remarque. Dans les propriétés permettant de « séparer » une somme ou un produit, je choisis d'utiliser des variables différentes (i, j, k) pour chaque somme : ce n'est pas obligatoire, mais une bonne idée pour éviter les confusions.

♣ **Exemple.** Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Une version plus rapide (sans récurrence!) dans le TD.

3. Changements d'indices

Exemple (Un premier cas « simple »). On considère la somme $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k+5}$. Écrire les premiers termes de cette somme. De quelle façon « plus naturelle » aurait-on pu l'écrire ?

♥ **Propriété 3.** Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de réels. On a les changements d'indices suivants :

- En posant $j = k + p$: (décalage d'indice)

$$\sum_{k=1}^n u_{k+p} = \sum_{j=1+p}^{n+p} u_j \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^n u_{k+p} = \prod_{j=1+p}^{n+p} u_j$$

- En posant $j = p - k$: (inversion du sens de sommation)

$$\sum_{k=1}^n u_{p-k} = \sum_{j=p-n}^p u_j \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^n u_{p-k} = \prod_{j=p-n}^p u_j$$

Remarque.

- Le plus souvent on posera $j = k + 1$, $j = k - 1$ ou $j = n - k$
- Pour d'autres changements d'indices, on sera prudent·e : il ne suffit pas de vérifier les bornes, par exemple comparer les sommes

$$\sum_{k=1}^n 2k \quad \text{et} \quad \sum_{j=2}^{2n} j$$

Exercice. Calculer

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$$

II. SOMMES ET PRODUITS USUELS

1. Sommes télescopiques

♥ **Propriété 4.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_1, \dots, u_{n+1}$ des réels. Alors

$$\sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1$$

Démonstration. Par récurrence, ou par changement d'indices

Exemple. Calculer $\sum_{k=0}^n (2k+1)$ en utilisant un développement de $(k+1)^2$

2. Sommes arithmétiques

Démonstration (La méthode « du petit Gauss », les aventures du jeune Carl Friedrich).

Propriété 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

n						
$\vdots$						
3						
2						
1						
	1	2	3	$\dots$	n	$n+1$

♥ *Exercice.* Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On en déduit par les propriétés des sommes :

$$\bullet \sum_{k=p}^n 2k =$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{1000} (5-3k) =$$

$$\bullet \sum_{\substack{k \in [1;100] \\ k \text{ impair}}} k =$$

3. Suites géométriques

Propriété 6. Soit $q \neq 1$ un réel et n un entier.

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration. Calculer $(1 - q) \sum_{k=0}^n q^k$

♣ *Exercice.* Soient p, n des entiers et $q \neq 1, \alpha$ des réels. Calculer

♥

$$\bullet \sum_{k=p}^n (\alpha q^k) = \bullet \sum_{k=0}^{1000} (-2)^k = \bullet \prod_{k=10}^{100} 3^k$$

4. Factorielle

Définition 7 (Factorielle). La définition du chapitre précédent se réécrit :

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

Exercice. Calculer $\prod_{k=1}^n (2k)$ puis $\prod_{k=1}^n (2k+1)$

5. Formule du binôme de Newton

Exemple. On connaît l'identité remarquable $(a+b)^2 = \dots\dots\dots$ et parfois $(a+b)^3 = \dots\dots\dots$, on va généraliser.

♥ **Propriété 8.** Soient $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Par récurrence.

Exercice. Calculer $(1+x)^n$ pour x réel et n entier.

III. SOMMES DOUBLES

Exemple. On a dit au début qu'on pouvait généraliser le symbole somme à n'importe quel ensemble fini I : prenons $I = \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket$. On écrit $\sum_{(i,j) \in I} u_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} u_{i,j}$

- En sommant par colonne, puis en sommant les résultats obtenus :
- En sommant par ligne, puis en sommant les résultats obtenus :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{i,j}$$

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{i,j}$$

$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$\dots$	$u_{1,n}$
$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	$\dots$	$u_{2,n}$
$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$
$u_{n,1}$	$u_{n,2}$	$\dots$	$u_{n,n}$

- En sommant par ligne, puis en sommant les résultats obtenus :
- En sommant par colonne, puis en sommant les résultats obtenus :

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i u_{i,j}$$

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n u_{i,j}$$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{1 \leq k \leq j \leq n} \frac{k}{j}$$

Remarque. Tout ce qu'on a dit ici s'applique évidemment aux produits doubles.