Feuilles d'exercices n°2

Exercice 1. Écrire sous une des formes du cours les ensembles :

1. des entiers naturels divisibles par 7 : $\{7k|k \in \mathbb{N}\}$ ou $\{n \in \mathbb{N}|\exists k \in \mathbb{N}, n = 7k\}$
2. des sommes de deux carrés d'entiers : $\{a^2 + b^2|(a, b) \in \mathbb{N}^2\}$ ou $\{n \in \mathbb{N}|\exists(a, b) \in \mathbb{N}^2, n = a^2 + b^2\}$
3. des nombres rationnels qui possèdent un antécédent par la fonction $x \mapsto e^x + x$: $\{y \in \mathbb{Q}|\exists x \in \mathbb{R}, e^x + x = y\}$

Exercice 3. Lesquelles des écritures suivantes désignent-elles le même ensemble ?

1. $\{x^2 + 1|x \in \mathbb{R}\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2|x \geq y\}$
3. $\{n \in \mathbb{N}|\forall k \in \mathbb{N}, n = 3k\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2|x > y\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2|x = y\}$
5. $\{3k|k \in \mathbb{Z}\}$
6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2|x > y\} \cup \{(x, x)|x \in \mathbb{R}\}$
7. $\{y \in \mathbb{R}|\exists x \in \mathbb{R}, y = x^2 + 1\}$
8. $[1; +\infty[$
9. l'ensemble des entiers relatifs divisibles par 3
10. $\varnothing$

Les écritures $1, 7$ et 8 désignent le même ensemble. Les écritures 2 et 6 aussi, mais pas la 4 : x ne peut pas être à la fois égal et strictement supérieur à y. Le 4ème est donc égal à $\varnothing$ (écriture 10). Il en va de même pour 3 : aucun nombre n'est le triple de **tous** les entiers. Par contre les écritures 5 et 9 désignent le même ensemble. Récapitulatif :

— $1, 7$ et 8
— 2 et 6
— 5 et 9
— $3, 4$ et 10

♠ **Exercice 12** (Préimage)**.** Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Pour $B \in \mathcal{F}$, on appelle **préimage** de B, notée $f^{-1}(B)$ l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

1. Soit $y \in F$. Comment appelle-t-on les éléments de $f^{-1}(\{y\})$? Les antécédents de y
2. Soient B_1, B_2 deux parties de F. Montrer que $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
   Raisonnons par double inclusion.

   — $\boxed{\subset}$ Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. Alors par définition, $f(x) \in B_1 \cup B_2$. Si $f(x) \in B_1$, alors $x \in f^{-1}(B_1)$. Si $f(x) \in B_2$, alors $x \in f^{-1}(B_2)$. On a bien dans les deux cas : $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
   — $\boxed{\supset}$ Soit $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Alors si $x \in f^{-1}(B_1)$, $f(x) \in B_1$ donc $f(x) \in B_1 \cup B_2$. De même si $x \in f^{-1}(B_2)$, $f(x) \in B_2$ donc $f(x) \in B_1 \cup B_2$. Dans les deux cas, $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$
   — Par double inclusion, l'égalité est vérifiée.
3. Montrer que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
   On raisonne encore par double implication, laissé en exercice.

Remarque : c'est une notation, on ne suppose pas ici que f est bijective ! Et c'est pour ça qu'il y a un petit symbole pique : si vous ne comprenez pas la différence, oubliez ! la notion n'est pas au programme.

Exercice 13 (Composition itérée)**.** Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$ Déterminer $f \circ f \circ \ldots \circ f(x)$ (où le symbole f apparaît n fois) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et de $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que cette composition est bien définie (sur quel ensemble de définition ?).
On essaie au brouillon les premières fois :

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x) + 1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x + 1}$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x)) = \frac{f(x)}{2f(x) + 1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{2\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{3x+1}{x+1}} = \frac{x}{3x + 1}$$

On conjecture : $(f\circ\ldots\circ f)(x)=\frac{x}{nx+1}$. Il reste à le montrer par récurrence. On détaille ci-dessous seulement le calcul de l'hérédité :

$$f\circ(f\circ\ldots\circ f)(x)=f(\frac{x}{nx+1})\text{ par HR}=\frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x}{nx+1}+1}=\frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{(n+1)x+1}{x+1}}=\frac{x}{(n+1)x+1}$$

La récurrence est établie.

Exercice 17 (Factorielle)**.** Pour $n\in\mathbb{N}$, simplifier

1. $(n+1)!-n!=(n+1)n!-n!=(n+1-1)n!=n\times n!$
2. $\frac{(n+3)!}{n!}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n!}{n!}=(n+1)(n+2)(n+3)$

Exercice 18 (Des propriétés des coefficients binômiaux)**.**

1. Montrer : $\forall k,p,n\in\mathbb{N},\binom{n}{p}\binom{p}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ (interprétation combinatoire ?)
   Soient $k,p,n\in\mathbb{N}$. D'après la formule du cours (formule explicite des coefs binômiaux) :
   $$\begin{aligned}\binom{n}{p}\binom{p}{k}&=\frac{n!}{p!(n-p)!}\times\frac{p!}{k!(p-k)!}\\&=\frac{n!}{(n-p)!k!(p-k)!}\end{aligned}$$
   D'autre part :
   $$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-k-p+k)!}\\&=\frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}\end{aligned}$$
   L'égalité est donc établie.
   Il y a une **interprétation combinatoire** : on prend un ensemble à n éléments, parmi lequel on veut choisir un sous-groupe A à p éléments et un sous-groupe B à k éléments tels que $B\subset A$. Il y a deux façons de procéder :
   - On commence par choisir les p éléments de A : il y a $\binom{n}{p}$ possibilités
   - Parmi les p éléments de A, on choisit k éléments pour B. Il y a $\binom{p}{k}$ possibilités. Ce calcul nous donne au total $\binom{n}{p}\binom{p}{k}$ choix pour (A,B)
   - On commence par choisir k éléments pour B. Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités. On complète alors B avec $p-k$ autres éléments pour former A. Ces éléments doivent être choisis parmi les $n-k$ éléments de $\overline{B}$: il y a $\binom{n-k}{p-k}$ possibilités. Ce calcul nous donne $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ choix pour (A,B)
   - Puisque ces deux calculs répondent au même problème :
   $$\binom{n}{p}\binom{p}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$
2. Pour quelles valeurs de $n,p\in\mathbb{N}$ a-t-on $\binom{n}{p}<\binom{n}{p+1}$?
   Pour tous $n,p\in\mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned}&\binom{n}{p}&&<\binom{n}{p+1}\\\iff&\frac{n!}{p!(n-p)!}&&<\frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}\\\iff&\frac{1}{n-p}&&<\frac{1}{p+1}\text{ en simplifiant par }n!p!(n-p-1)!\\\iff&p+1&&<n-p\text{ (si }p<n)\\\iff&p&&\boxed{<\frac{n-1}{2}}\end{aligned}$$
   Ceci nous dit que $\binom{n}{p}$ est croissant en fonction de p jusqu'à la moitié des valeurs (la moitié de la ligne dans le triangle de Pascal)

3. Pour quelles valeurs de $n, p, q \in \mathbb{N}$ a-t-on $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$? Au vu du calcul précédent, puisque la suite est croissante **strictement** en fonction de p, il n'y a pas d'égalités sur chaque moitié de la ligne. Il y a donc deux possibilités : $q = p$ ou $q = n - p$

Exercice 19. En utilisant la formule explicite des coefficients binômiaux, montrer que si n est un entier, tout produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$
En notant k le premier de ces entiers, on cherche à montrer que $k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)$ est divisible par $n!$. Or,

$$\begin{aligned}\frac{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)}{n!} &= \frac{1 \times 2 \times \dots \times (k-1) \times k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)}{1 \times 2 \times \dots \times (k-1) \times n!} \\ &= \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} \\ &= \binom{n+k-1}{n}\end{aligned}$$

Puisque c'est un coefficient binômial, c'est un entier. $k(k+1)\dots(k+n-1)$ est donc un multiple de $n!$
Des exemples :

$$4 \times 5 \times 6 \times 7 \text{ est divisible par } 4! = 24$$

♠ **Exercice 20.** Soit E un ensemble (pas nécessairement fini). Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'application surjective $f : E \to \mathcal{P}(E)$
Indication : considérer l'ensemble $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$
Supposons **par l'absurde** qu'il existe un ensemble E et une application $f : E \to \mathcal{P}(E)$ surjective.
Considérons l'ensemble $A = \{x \in E, x \notin f(x)\} \subset E$. Alors, puisque f est surjective, A admet un antécédent $x_0 \in E$. Il y a alors deux cas :

— Si $x_0 \in A$, alors $x_0 \in f(x_0)$. Dans ce cas, $x_0 \notin A$ (par définition de A) et il y a une **contradiction**.
— Si $x_0 \notin A$, alors $x_0 \notin f(x_0)$. Dans ce cas, $x_0 \in A$ (par définition de A) et il y a une **contradiction**

On en déduit qu'il y a une contradiction dans les deux cas, c'est donc qu'une telle application ne peut pas exister.
*Culturel : on a dit dans le cours que si $f : E \to F$ était surjective, alors $|E| \geq |F|$. Il y a une réciproque : si $|E| \geq |F|$, alors il y a une surjection de E vers F. Tout ceci est valable dans le cas d'ensembles **finis**. Pour des ensembles **infinis**, la notion de «cardinal plus grand» n'a pas de sens, mais on peut élargir la notion : on dira alors qu'un ensemble infini F est plus grand qu'un autre ensemble infini E si il n'existe pas de surjection de E vers F. On a alors ici trouvé un moyen de créer des ensembles infinis de plus en plus grands : $\mathbb{N}$ est plus petit que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, lui-même plus petit que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, etc. Savoir s'il existe un ensemble plus grand que $\mathbb{N}$ mais plus petit que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est un problème **indécidable*** (voir : hypothèse du continu)