

Consignes :

La calculatrice et tout appareil électronique sont interdits. Le sujet est volontairement long. Votre copie doit être aérée, propre, numéros des questions indiquées. La structure de la réponse doit être mise en évidence (mode de raisonnement, conclusion...) et les résultats encadrés.

EXERCICE 1 - QUESTIONS INTRODUCTIVES

Toutes les questions suivantes sont indépendantes.

1. Dans les questions suivantes, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Écrire les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs :

- | | |
|--|---|
| (a) f est une fonction croissante | (d) f est une fonction injective |
| (b) f est une fonction affine | (e) à partir d'un moment, f est comprise entre 0 et 1 |
| (c) f est une fonction qui ne s'annule pas | |

2. Écrire les négations des propriétés précédentes.

3. Montrer par l'absurde que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre **décimal**, c'est-à-dire un nombre qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$.

4. Soient a, b des réels. Montrer l'équivalence :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, a2^n + b3^n = 0) \iff a = b = 0$$

5. Quel est le rôle du programme suivant ?

```
a=float(input("entrer A"))
b=float(input("entrer B"))
if a < b :
    print(b)
else :
    print(a)
```

EXERCICE 2 - ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTÉ D'ORDRE 2

On appelle pour tout entier n , T_n le nombre d'entiers naturels de n chiffres exactement ne comportant pas la séquence «17» dans l'écriture en base 10. On ne considère pas 0 comme étant un nombre à 1 chiffre, ni 09 comme étant un nombre à 2 chiffres. On admet $T_0 = 1$

1. Déterminer T_1 et T_2 , en justifiant.
2. Justifier que pour tout entier n :

$$T_{n+2} = 10T_{n+1} - T_n$$

3. Compléter le code Python suivant pour qu'il calcule et affiche les 100 premiers termes de la suite :

```
u = .....
v = .....
for k in range(.....):
    print(u)
    u, v = v, .....
```

4. Résoudre l'équation $x^2 - 10x + 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On notera α et β les racines trouvées.
5. **Analyse** : Supposons qu'il existe deux réels a, b tels que pour tout n : $T_n = a\alpha^n + b\beta^n$. Déterminer les valeurs de a et b
6. **Synthèse** : Montrer par récurrence double que $T_n = a\alpha^n + b\beta^n$
7. Quelle propriété étonnante a-t-on montré sur le nombre $\frac{(3+\sqrt{6})}{6}(5+2\sqrt{6})^n + \frac{(3-\sqrt{6})}{6}(5-2\sqrt{6})^n$?

EXERCICE 3 - FONCTIONS INDICATRICES

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On appelle **fonction indicatrice** de A , notée f_A , l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0; 1\}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = 1$ si $x \in A$; $f(x) = 0$ si $x \notin A$.

1. On pose pour cette question $A = [0; 2]$.
 - (a) Tracer le graphe de f_A
 - (b) La fonction précédente est-elle injective? Surjective?
2. Pour quels ensembles A la fonction f_A n'est-elle pas surjective à valeurs dans $\{0; 1\}$?
3. Montrer que pour toutes parties A, B de $\mathbb{R}$:
 - (a) $\forall x \in \mathbb{R}, f_A^2(x) = f_A(x)$
 - (b) $\forall x \in \mathbb{R}, f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \times f_B(x)$
 - (c) $\forall x \in \mathbb{R}, f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \times f_B(x)$
4. Que dire si $A \cap B = \emptyset$?
5. Montrer que pour tout ensemble A , $f_{\bar{A}} = 1 - f_A$
6. Montrer que pour tous ensembles A, B , A et B sont égaux si et seulement si $1_A = 1_B$
7. On appelle **différence symétrique** de A, B l'ensemble $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Montrer :

$$1_{A \Delta B} = 1_A + 1_B - 2 \times 1_A \times 1_B$$

8. En utilisant les questions précédentes, montrer que pour tous trois ensembles A, B, C :

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

EXERCICE 4 - DEUX ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

A - Fonctions linéaires à variable rationnelle

Cherchons l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{Q}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

1. **Analyse** Considérons f une fonction vérifiant : $\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x + y) = f(x) + f(y)$
 - (a) Déterminer $f(0)$
 - (b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nf(1)$
 - (c) Montrer que pour tout entier m négatif : $f(m) = mf(1)$
 - (d) Notons $a = f(1)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$
On pourra écrire x sous la forme d'une fraction.
2. **Synthèse** Vérifier que les fonctions linéaires sur $\mathbb{Q}$ sont des solutions du problème
3. Conclure.

B - Surjectivité de la fonction solution

L'objectif de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(f(x + 1) + y - 1) = f(x) + y$$

1. **Analyse** Soit f une fonction solution du problème.
 - (a) Montrer que f est surjective.
Pour tout t réel, on trouvera l'expression d'un antécédent de t en fonction de $t, f(0), f(1)$
 - (b) Soit u un antécédent de 1 et $x_0 = u - 1$. En utilisant $f(x_0 + 1) = 1$, montrer que pour tout réel y :

$$f(y) = f(x_0) + y$$
 - (c) Conclure qu'il existe un réel c tel que f soit la fonction $y \mapsto y + c$.
 - (d) Déterminer les valeurs possibles pour c .
2. **Synthèse** Vérifier que la fonction identité sur $\mathbb{R}$ est bien solution du problème.
3. Conclure.

EXERCICE 5 - UNE PROPRIÉTÉ SANS INDICATIONS

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! (p, q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q + 1)$$

*Remarque : ceci définit une **bijection** entre $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}^2$*