

Important : copie aérée, propre, mode de raisonnement mis en évidence, résultats encadrés, phrases de conclusion. Le barème est indicatif mais permet d'avoir une idée générale de la répartition des points. La règle est : **1 argument = 1 point**, pensez à justifier !

Les exercices peuvent être traités indépendamment, en utilisant éventuellement les résultats d'autres exercices. Dans ces cas-là, le résultat à utiliser est indiqué dans l'énoncé.

REMARQUES

- Il y avait dans certains exercices une ou deux questions plus difficiles, notamment : **ex2-q2**, **ex4A-q1d**, **ex4B-q1a**. Un certain nombre d'entre vous a abandonné l'exercice à une de ces questions, alors que les suivantes étaient plus simples, c'est dommage : on peut **admettre un résultat** et continuer l'exercice. Il y avait des questions élémentaires, notamment : **ex2-q4**, **ex2-q6** (plus difficile mais très similaire à la question de cours Fibonacci), **ex3-q5** (par exemple), **ex4B-q1b**, **q1c**, **2**
- L'exercice 3 est assez discriminant : certains s'en sortent très bien, d'autres s'embourbent dans des confusions entre : fonctions, ensembles, cardinaux (il n'y avait pas d'ensembles finis!), éléments des ensembles ... et racontent des aberrations.
- L'exercice 5 avait pour vocation de permettre une question plus ouverte, certains élèves progressent raisonnablement, pas de rédaction correcte et complète pour cet exercice.
- Des remarques plus spécifiques :** un certain nombre de copies proposent en question 1 des phrases avec des variables non introduites, des variables inutilisées ou des phrases séparées par une simple virgule. Un certain nombre de copies «identifient» dans des fractions : que penser de l'affirmation $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow (a = c) \text{ et } (b = d)$? Dans l'exercice 2, question 5, une question très calculatoire a donné lieu à beaucoup d'erreurs de calcul (ou abandon, ou résolution de manière très peu efficace)
- À la question ex2-2**, vous proposez parfois une démonstration par récurrence - ce n'est pas une mauvaise idée, mais il faut bien comprendre qu'on essaie de démontrer ici une **relation de récurrence**. Celle-ci se justifie le plus souvent autrement que par récurrence, et est utilisée plus tard (ici question 6) dans une démonstration par récurrence.

EXERCICE 1 - QUESTIONS INTRODUCTIVES (19 PT)

- $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (1 pt)
 - $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ (1 pt)
 - $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ (1 pt)
 - $\forall x, x' \in \mathbb{R}, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (définition du cours) (1 pt)
 - $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, 0 \leq f(x) \leq 1$ (1 pt)
- $\exists x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ et } f(x) > f(y)$ (1 pt)
 - $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq ax + b$ (1 pt)
 - $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ (1 pt)
 - $\exists x, x' \in \mathbb{R}, x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')$ (1 pt)
 - $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \geq A, f(x) < 0 \text{ ou } f(x) > 1$ (1 pt)
- Supposons **par l'absurde** qu'il existe deux entiers naturels a, b tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^b}$, i.e. $10^b = 3a$. (1 pt) On veut trouver une contradiction avec le fait que 10^b soit divisible par 3. Voici une proposition :
On en déduit que 10^b est divisible par 3 (1 pt), donc que la somme de ses chiffres est un multiple de 3. Or 10^b s'écrit avec un 1 suivi de b fois le chiffre 0, donc la somme de ses chiffres est 1. Puisque 1 n'est pas un multiple de 3, il y a une **contradiction**. (1 pt)
Ainsi, $\frac{1}{3}$ n'est **pas un nombre décimal**.
- Raisonnons **par double implication**. (1 pt)
 - $\Leftarrow$ Si $a = b = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, a \times 2^n + b \times 3^n = 0 \times 2^n + 0 \times 3^n = 0 + 0 = 0$. (1 pt)
 - $\Rightarrow$ Supposons maintenant que pour tout entier $n, a2^n + b3^n = 0$. Alors en particulier pour $n = 0$ et pour $n = 1$:

$$\begin{cases} a \times 1 + b \times 1 = 0 \\ a \times 2 + b \times 3 = 0 \end{cases}$$

On obtient un système de deux équations à deux inconnues qu'on résout en $\boxed{a = b = 0}$. Ainsi, la deuxième implication est montrée. (2 pt)
- Le programme demande à l'utilisateur deux nombres et affiche le plus grand des deux. (2 pt) (on le vérifie par disjonction de cas)

EXERCICE 2 - ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTÉ D'ORDRE 2 (21 PT)

On appelle pour tout entier n, T_n le nombre d'entiers naturels de n chiffres exactement ne comportant par la séquence «17» dans l'écriture en base 10. On ne considère pas 0 comme étant un nombre à 1 chiffre, ni 09 comme étant un nombre à 2 chiffres.

- Il y a 9 nombres à 1 chiffre (de 1 à 9) et aucun de ceux-là ne contient la séquence 17 donc $T_1 = 9$ (1 pt). Pour les nombres à 2 chiffres, il y a 9 choix pour le premier chiffre et 10 choix pour le 2ème (qui peut être égal à 0), donc 90 choix dont un seul contient la séquence 17 : $T_2 = 89$ (1 pt)
- Soit n un entier. Montrons que $10T_{n+1} = T_{n+2} + T_n$. Prenons un nombre à $n + 1$ chiffres se terminant par un chiffre c ne contenant pas la séquence 17 et ajoutons lui un dernier chiffre d . Il y a $10T_{n+1}$ tels nombres. Raisonnons par disjonction de cas (1 pt) :
 - Si $c \neq 1$ ou $d \neq 7$, alors le nombre ne contient pas non plus la séquence 17. Il y a T_{n+2} nombres à $n + 2$ chiffres ne contenant pas 17.
 - Si $c = 1$ et $d = 7$, alors le nombre s'écrit comme un nombre à n chiffres ne contenant pas la séquence 17 suivi de «17». Il y a T_n tels nombres.
 On a réparti ces $10T_{n+1}$ nombres en deux catégories de T_{n+2} et T_n nombres. Ainsi : $T_{n+2} = 10T_{n+1} - T_n$ (2 pt)
- Compléter le code Python suivant pour qu'il calcule et affiche les 100 premiers termes de la suite :

```

u = 1
v = 9
for k in range(100):
    print(u)
    u, v = v, 10*v - u

```

(4 pt)

- Le discriminant de l'équation est $\Delta = 100 - 4 = 96 = (4\sqrt{6})^2 \geq 0$. Elle a donc deux racines $\alpha = \frac{10-4\sqrt{6}}{2} = 5 - 2\sqrt{6}$ et $\beta = 5 + 2\sqrt{6}$ (2 pt)
- Analyse** : avec $n = 0$, on obtient $1 = a + b$ et avec $n = 1$ on obtient $9 = a\alpha + b\beta = a(5 - 2\sqrt{6}) + b(5 + 2\sqrt{6})$, c'est-à-dire $b = 1 - a$ et :

$$a(5 - 2\sqrt{6}) + (1 - a)(5 + 2\sqrt{6}) = 9 \iff -4\sqrt{6}a = 9 - 5 - 2\sqrt{6} \iff a = \frac{4 - 2\sqrt{6}}{-4\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2} \left[= \frac{3-\sqrt{6}}{6} \right]$$

On en déduit ensuite $b = 1 - a = \frac{3+\sqrt{6}}{6}$

(3 pt)

- Synthèse** : Par récurrence double (1 pt)
 - Initialisation : $a + b = 1 = T_0$ et $a\alpha + b\beta = 9 = T_1$ donc la propriété est initialisée. (1 pt)
 - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tels que $T_n = a\alpha^n + b\beta^n$ et $T_{n+1} = a\alpha^{n+1} + b\beta^{n+1}$. (1 pt)
 Alors :

$$\begin{aligned}
 T_{n+2} &= 10T_{n+1} - T_n \\
 &= 10(a\alpha^{n+1} + b\beta^{n+1}) - (a\alpha^n + b\beta^n) \text{ par hyp. de récurrence} \\
 &= a\alpha^n(10\alpha - 1) + b\beta^n(10\beta - 1) \\
 &= a\alpha^n \times \alpha^2 + b\beta^n \times \beta^2 \text{ d'après la question 4} \\
 &= a\alpha^{n+2} + b\beta^{n+2}
 \end{aligned}$$

La récurrence est établie. (3 pt) On a donc montré que pour tout entier n , $T_n = a\alpha^n + b\beta^n$

- C'est un entier! (1 pt)

EXERCICE 3 - FONCTIONS INDICATRICES (31 pt)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On appelle **fonction indicatrice** de A , notée f_A , l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0; 1\}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = 1$ si $x \in A$; $f(x) = 0$ si $x \notin A$.

- On pose pour cette question $A = [0; 2]$.
 - Constante égale à 1 sur $[0; 2]$ et nulle partout ailleurs (2 pt)
 - Elle est surjective : 1 a par exemple 1 comme antécédent et 0 a par exemple -1 comme antécédent (2 pt). Elle n'est pas injective : 0 et 2 ont la même image. (1 pt)
- f_A n'est pas surjective si 0 ou 1 n'a pas d'antécédent.
 - 0 n'a pas d'antécédent si toutes les images sont égales à 1, c'est-à-dire si $A = \mathbb{R}$

— 1 n'a pas d'antécédent si toutes les images sont égales à 0, c'est-à-dire si $A = \emptyset$

Ainsi, f_A est surjective sauf si $A = \mathbb{R}$ ou $A = \emptyset$ (2 pt)

3. Montrer que pour toutes parties A, B de $\mathbb{R}$:

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par disjonction de cas : (1 pt)

— Si $x \in A$, alors $f_A(x) = 1$ et $f_A^2(x) = 1^2 = 1$ donc $f_A^2(x) = f_A(x)$ (1 pt)

— Si $x \notin A$, alors $f_A(x) = 0$ et $f_A^2(x) = 0^2 = 0$ donc $f_A^2(x) = f_A(x)$ (1 pt)

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par disjonction de cas : (1 pt)

— Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $f_A(x) = f_B(x) = 1 : f_A(x) \times f_B(x) = 1 \times 1 = 1$ et par définition $f_{A \cap B}(x) = 1$. On a bien $f_{A \cap B}(x) = f_A(x)f_B(x)$ (1 pt)

— Si $x \notin A \cap B$, alors $f_A(x) = 0$ ou $f_B(x) = 0$ et alors $f_A(x) \times f_B(x) = 0$ et d'autre part $f_{A \cap B}(x) = 0$. On a aussi $f_{A \cap B}(x) = f_A(x)f_B(x)$ (1 pt)

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par disjonction de cas :

— Si $x \in A \cap B$, alors $f_{A \cup B} = 1$ et $f_A(x) + f_B(x) - f_{A \cap B}(x) = 1 + 1 - 1 = 1$ donc $f_{A \cup B} = f_A(x) + f_B(x) - f_{A \cap B}(x)$ (1 pt)

— Si $x \in A$ mais $x \notin B$, alors $f_{A \cup B} = 1$ et $f_A(x) + f_B(x) - f_{A \cap B}(x) = 1 + 0 - 0 = 1$. (1 pt)

— De même si $x \in B$ mais $x \notin A$ (1 pt)

— Finalement, si $x \notin A$ et $x \notin B$, alors $f_{A \cup B}(x) = 0$ et $f_A(x) + f_B(x) - f_{A \cap B}(x) = 0 + 0 - 0 = 0$. (1 pt)

— Dans chacun des 4 cas, on a bien $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_{A \cap B}(x)$

4. On a alors pour tout réel x , $f_{A \cap B}(x) = 0$ et donc $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x)$ (1 pt)

5. Encore par disjonction de cas :

— Si $x \in A$, $x \notin \bar{A}$ donc $f_A(x) = 1$ et $f_{\bar{A}}(x) = 0$ et $0 = 1 - 1$ (1 pt)

— Si $x \notin A$, $x \in \bar{A}$ donc $f_A(x) = 0$ et $f_{\bar{A}}(x) = 1$ et $1 = 1 - 0$ (1 pt)

6. Par double implication : (1 pt)

— Si $A = B$, alors $f_A = f_B$ (1 pt)

— Si $f_A = f_B$, montrons que $A = B$. Si $x \in A$, alors $f_A(x) = 1$ et alors $f_B(x) = 1$ donc $x \in B$. On en déduit $A \subset B$. Réciproquement, si $x \in B$, alors $f_B(x) = 1$ donc par hypothèse $f_A(x) = 1$ donc $x \in A$. Ainsi $B \subset A$. On en conclut $A = B$ (2 pt)

7. En appliquant les questions précédentes. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f_{A \Delta B}(x) &= f_{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)}(x) \\ &= f_{A \setminus B}(x) + f_{B \setminus A}(x) - f_{(AB) \cap (B \setminus A)}(x) \text{ d'après la question 3c} \\ &= f_A(x)f_{\bar{B}}(x) + f_B(x)f_{\bar{A}}(x) - f_{A \cap \bar{A}}(x)f_{B \cap \bar{B}}(x) \text{ d'après la question 3b} \\ &= f_A(x)(1 - f_B(x)) + (1 - f_A(x))f_B(x) - 0 \text{ d'après la question 5 et parce que } A \cap \bar{A} = \emptyset \\ &= f_A(x) - f_A(x)f_B(x) + f_B(x) - f_A(x)f_B(x) \\ &= f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x)f_B(x) \end{aligned}$$

(3 pt)

On pouvait aussi ne pas appliquer les questions précédentes et refaire une disjonction de cas.

8. Appliquons les questions précédentes. D'après la question 6, il suffit de montrer que $f_{A \cap (B \Delta C)} = f_{(A \cap B) \Delta (A \cap C)}$ (1 pt). Or, d'après les questions 3b et 7 :

$$\begin{aligned} f_{A \cap (B \Delta C)} &= f_A \times f_{B \Delta C} \\ &= f_A(f_B + f_C - 2f_B f_C) \\ &= f_A f_B + f_A f_C - 2f_A f_B f_C \end{aligned}$$

(2 pt) D'autre part,

$$\begin{aligned} f_{(A \cap B) \Delta (A \cap C)} &= f_{A \cap B} + f_{A \cap C} - 2f_{A \cap B} f_{A \cap C} \\ &= f_A f_B + f_A f_C - 2f_A^2 f_B f_C \\ &= f_A f_B + f_A f_C - 2f_A f_B f_C \text{ d'après la question 3a} \end{aligned}$$

(2 pt) Ainsi, les deux fonctions indicatrices sont égales, et donc les ensembles aussi. (1 pt)

EXERCICE 4 - DEUX ÉQUATIONS FONCTIONNELLES (26 pt)**A - Fonctions linéaires à variable rationnelle (13 pt)**

Cherchons l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{Q}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

1. **Analyse** Considérons f une fonction vérifiant : $\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x + y) = f(x) + f(y)$

- (a) En posant $x = y = 0$, on obtient $f(0 + 0) = f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$ (1 pt)
 (b) Montrons ce résultat par récurrence. Initialisation : Pour $n = 0$ on vient de le montrer et pour $n = 1$, c'est évident.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = nf(1)$. Alors,

$$\begin{aligned} f(n + 1) &= f(n) + f(1) \text{ puisque } n \text{ et } 1 \text{ sont des rationnels} \\ &= nf(1) + f(1) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= (n + 1)f(1) \end{aligned}$$

et la récurrence est établie.

(3 pt)

- (c) Soit m un entier négatif. Alors $-m$ est un entier positif et vérifie d'après la question précédente $f(-m) = (-m)f(1)$. Par ailleurs,

$$0 = f(0) = f(m + (-m)) = f(m) + f(-m) = f(m) - mf(1)$$

On en déduit : $f(m) = mf(1)$ (3 pt)

- (d) Soit x un nombre rationnel et p, q deux entiers tels que $x = \frac{p}{q}$. Alors, $f(qx) = f(p) = pf(1)$ car p est un entier (on utilise les questions b et c). Par ailleurs, on montre par une récurrence immédiate que $f(qx) = qf(x)$. Ainsi : $f(qx) = \frac{p}{q}f(1) = \frac{p}{q}a = ax$ (3 pt)

Remarque : SI VOUS N'AVEZ PAS RÉDIGÉ PROPREMENT AU MOINS 2 RÉCURRENCES PLUS TÔT, IL FAUT LE FAIRE ICI ! Je me le permets car c'est exactement la même qu'à la question 1b où j'ai fait des efforts de rédaction !

2. **Synthèse** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \in \mathbb{Q} \mapsto ax$. Alors pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} f(x + y) &= a(x + y) \text{ par définition de } f \\ &= ax + ay \text{ par distributivité} \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Ainsi, ces fonctions sont solutions du problème. (2 pt)

3. On conclut que l'ensemble des solutions du problème est l'ensemble des fonctions linéaires (c'est-à-dire de la forme $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$) (1 pt)

B - Surjectivité de la fonction solution (13 pt)

L'objectif de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(f(x + 1) + y - 1) = f(x) + y$$

1. **Analyse** Soit f une fonction solution du problème.

- (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. (1 pt) En posant $x = 0$ et $y = t - f(0)$ on obtient :

$$f(f(1) + t - f(0)) = f(0) + t - f(0) = t$$

On en déduit que $f(1) + t - f(0)$ est un antécédent de t , donc que f est surjective. (2 pt)

- (b) Puisque $x_0 + 1 = u$, $f(x_0 + 1) = f(u) = 1$ par définition. (1 pt) Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$f(y) = f(1 + y - 1) = f(f(x_0 + 1) + y - 1) = f(x_0) + y$$

(2 pt)

- (c) Posons $c = f(x_0)$. x_0 ne dépend pas du choix de y et la question précédente montre que pour tout réel y , $f(y) = y + c$ (1 pt)

- (d) *Il y a plusieurs méthodes, j'en propose une ici.* En prenant $f(x_0) = c$ et $f(x_0) = x_0 + c$, on déduit $x_0 = 0$ et donc $u = 1$. On utilise alors : $f(1) = 1 + c = 1$ (car $f(u) = 1$) donc $c = 0$ (2 pt)

2. **Synthèse** L'analyse nous donne donc avec $c = 0 : f : y \mapsto y$ (c'est-à-dire que f est la fonction identité). On vérifie : pour tous x, y réels, (1 pt)

$$\begin{aligned} f(f(x+1) + y - 1) &= f(x+1 + y - 1) \\ &= x+1 + y - 1 \\ &= x + y \\ &= f(x) + y \end{aligned}$$

Ainsi, $f = id_{\mathbb{R}}$ est solution du problème. (2 pt)

3. La fonction identité est la seule solution du problème. (1 pt)

EXERCICE 5 - UNE PROPRIÉTÉ SANS INDICATIONS (10 pt)

Pour l'existence, raisonnons par récurrence forte. (1 pt)

Initialisation : pour $n = 1, p = 0$ et $q = 0$ conviennent. (1 pt)

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in [1; n]$, il existe p, q des entiers vérifiant $k = 2^p(2q+1)$ (remarque : ici p et q dépendent de k)

Raisonnons par disjonction de cas : (1 pt)

- Si $n+1$ est impair, alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2q+1$. Dans ce cas, $p = 0$ convient (1 pt)
- Si $n+1$ est pair, alors il existe un certain entier k tel que $n+1 = 2k$. Puisque $k = \frac{n+1}{2}$ et que $n \geq 1$, alors $k \in [1; n]$. **Par hypothèse de récurrence**, il existe alors p, q tels que $k = 2^p(2q+1)$. Alors, $n+1 = 2k = 2^{p+1}(2q+1)$ (2 pt)

La récurrence est ainsi établie.

Conclusion : On en conclut que la propriété est vraie pour tout n .

Il reste à montrer que p et q sont **uniques**. Prenons n un entier et p, q, p', q' tels que $n = 2^p(2q+1) = 2^{p'}(2q'+1)$. Supposons quitte à intervertir les lettres que $p' \leq p$. Alors,

$$2^{p-p'}(2q+1) = 2q'+1$$

Le nombre à droite de l'égalité est impair donc celui à gauche de l'égalité est impair. Ceci n'est possible que si $2^{p-p'} = 1$, donc $p = p'$.

Dans ce cas, on a bien en simplifiant $2q+1 = 2q'+1$ et donc $q = q'$ (4 pt)

En l'absence d'indications, des points sont attribués aux raisonnements partiels, voire des points bonus si nécessaire. Ceci n'est qu'une rédaction possible.