

Devoir Maison n°3 - Une généralisation des formules du TD

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$S_i(n) = \sum_{k=0}^n k^i$$

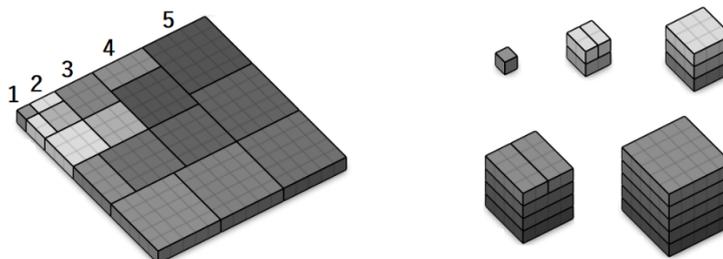
1. Premières valeurs de n

(a) Rappeler les valeurs de $S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ (d'après le cours et le TD)

(b) On observe :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_3(n) = S_1(n)^2$$

Expliquer le dessin suivant :



2. Formule de récurrence

Posons aussi :

$$T_i(n) = \sum_{k=1}^n ((k+1)^{i+1} - k^{i+1})$$

(a) En remarquant un télescopage, simplifier l'expression de $T_i(n)$

(b) Dédurre :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{i+1} = S_{i+1}(n) + (n+1)^{i+1} - 1$$

(c) Grâce au binôme de Newton, développer : $(k+1)^{i+1}$.

On appellera q la variable muette de sommation

(d) Dédurre de la question précédente :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{i+1} = S_{i+1}(n) + (i+1)S_i(n) + \sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n)$$

Indication : on utilisera une interversion de somme double.

(e) À l'aide des égalités montrées aux questions 2b et 2d, montrer :

$$S_i(n) = \frac{1}{i+1} \left((n+1)^{i+1} - 1 - \sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n) \right)$$

3. Application

Démontrer :

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

4. Simulations numériques

On écrit un programme Python permettant de calculer : $\frac{S_i(n)}{\frac{n^{i+1}}{i+1}}$.

(a) Compléter le code suivant :

```
i = int(input(" entrer une valeur de i "))
n = int(input(" entrer une valeur de n "))
s = .....
for k in range ( ..... ):
    s = .....
print ( s / ..... )
```

(b) Recopier le code obtenu dans un éditeur Python et tester avec plusieurs valeurs de i et plusieurs (grandes) valeurs de n . Qu'observe-t-on?

Remarque : plus tard dans l'année on reformulera : $S_i(n) \sim \frac{n^{i+1}}{i+1}$