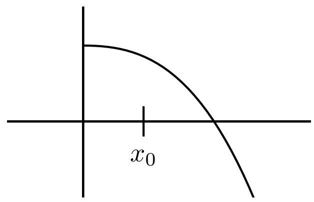
Devoir Maison n°4 - Méthode de Newton et $\sqrt{2}$

Exercice 1 - Autour de la méthode de Newton

Consigne : Pour résoudre numériquement l'équation $f(x) = 0$, on établit l'algorithme ci-dessous à gauche. L'appliquer (graphiquement) à la fonction f tracée à droite.

1. Choisir un réel x_0 quelconque
2. Tracer la tangente T_0 à la courbe de f au point $M(x_0, f(x_0))$. T_0 coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse x_1.
3. Tracer la tangente T_1 à la courbe de f au point $M(x_1, f(x_1))$, T_1 coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse x_2
4. Recommencer plusieurs fois.



1. On admet que la tangente à la courbe de f à l'abscisse a a pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. En déduire une expression de x_{n+1} en fonction de x_n
2. On cherche à résoudre l'équation $\cos(x) = x^3$. On pose $f : x \mapsto \cos(x) - x^3$
   (a) Déterminer une expression de f'. En déduire les variations de f et vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution.
   (b) Compléter le programme suivant pour qu'il calcule les premiers termes de la suite (x_n)

```
from math import cos, sin
def f(y):
    return ............
def fprime(y):
    return ............
x = 0.5
n = 100
for k in range(n):
    x = .................
print(x)
```

   (c) Implémenter ce programme et donner une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 0$. Trouve-t-on la même limite en changeant la valeur de x_0 ?

Exercice 2 - Méthode de Newton appliquée à $\sqrt{2}$

On cherche maintenant à approximer $\sqrt{2}$, c'est-à-dire une racine de l'équation $x^2 - 2 = 0$

1. En utilisant la première partie, justifier pourquoi la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

   est l'application de la méthode de Newton à ce problème.
2. **Une autre justification** Traçons un rectangle de côté 1 et d'aire 2. Notons x_1 la moyenne de ses deux côtés. Traçons un rectangle de côté x_1 et d'aire 2. Notons x_2 la moyenne de ses deux côtés. Recommençons plusieurs fois. Comment se calcule x_{n+1} à partir de x_n ? Pourquoi peut-on penser que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2}$?
3. **Étude de la convergence de** (u_n)
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{2}$
   (b) Montrer que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
   (c) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite
   (d) Écrire un programme Python qui permet de calculer les premiers termes et qui s'arrête lorsque $|u_n^2 - 2|$ est inférieur à 10^{-6}