

Devoir Maison n°2

EXERCICE I - ÉTUDE DE FONCTION

Remarque : on travaillera les études de fonctions, dérivées, limites dans des chapitres ultérieurs. L'enjeu est de vous faire travailler du **calcul** (de dérivées et limites en particulier), et de voir où la classe en est en analyse. Ça doit vous permettre aussi éventuellement de voir quelles techniques de calcul vous manquent et de les travailler -> pensez au cahier de calcul!

On introduit les fonctions définies par : $f : x \mapsto e^{-x} \ln(1 + e^x)$ et $g : x \mapsto \frac{x}{1+x} - \ln(1 + x)$. On définit f sur \mathbb{R} et g sur \mathbb{R}_+ .

1. Justifier que f est bien définie sur \mathbb{R}

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x \geq 1$ et donc $\ln(1 + e^x)$ est bien défini. Par ailleurs l'exponentielle est définie sur \mathbb{R} .

2. Déterminer le signe de f sur \mathbb{R}

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 &\iff e^{-x} \ln(1 + e^x) \geq 0 \\ &\iff \ln(1 + e^x) \geq 0 \text{ car } e^x > 0 \\ &\iff 1 + e^x \geq 1 \text{ par croissance de l'exponentielle} \\ &\iff e^x \geq 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation étant vraie sur \mathbb{R} entier, la fonction f est identiquement positive.

3. (a) Dresser le tableau de variations complet de g sur \mathbb{R}_+

g est dérivable sur \mathbb{R}^+ avec pour tout $x \geq 0$:

$$g'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{-x}{(1+x)^2} \leq 0$$

Ainsi, g est décroissante sur \mathbb{R}_+ . De plus, $g(0) = 0 - \ln(1) = 0$ et $g(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} - \ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$

x	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-	
Variations de $g(x)$		

- (b) En déduire le signe de g sur \mathbb{R}_+

On lit dans le tableau de variations de g que g est négative sur \mathbb{R}_+ .

4. Calculer f' et l'exprimer en fonction de g . On admet pour le moment que f est dérivable.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} \ln(1 + e^x) + e^{-x} e^x \frac{1}{1 + e^x} \\ &= e^{-x} \left(\frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x) \right) \\ &= e^{-x} g(e^x) \end{aligned}$$

5. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. En déduire la limite de f en $-\infty$.

On réécrit pour tout réel x : $f(x) = \frac{1+e^x}{e^x}$. Or, quand $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$. Ainsi (d'après l'énoncé) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

6. Montrer que pour tout réel x , $\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$. En déduire la limite de f en $+\infty$. f admet-elle une asymptote en $+\infty$?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\ln(1 + e^x) = \ln(e^x(1 + e^{-x})) = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) = x + \ln(1 + e^{-x})$$

On en déduit donc que $f(x) = xe^{-x} + \ln(1 + e^{-x})e^{-x}$. Le deuxième terme tend vers 0 par les opérations usuelles, le premier terme par croissance comparée. On en déduit : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. f admet une asymptote d'équation $y = 0$

7. En déduire le tableau de variations de f sur \mathbb{R}

On a montré que g était négative. Puisque e^{-x} est positif pour tout x et que $f'(x) = e^{-x}g(e^x)$, on en déduit que f' est négative sur \mathbb{R} et donc que f est décroissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	
Variations de $f(x)$		

8. Dessiner l'allure de la courbe en précisant les éventuelles asymptotes ainsi que la tangente en 0. On pourra admettre : $\ln(2) \simeq 0.69$

On tracera les asymptotes d'équation $y = 1$ (en $-\infty$) et $y = 0$ (en $+\infty$). On a calculé :

$$f'(0) = e^0 \left(\frac{e^0}{1 + e^0} - \ln(1 + e^0) \right) = \frac{1}{2} - \ln(2) \simeq -0.19$$

On tracera donc la tangente en 0 d'équation $y \simeq -0.19x + \ln(2)$ (puisque $f(0) = \ln(2)$). Sur une feuille à carreaux, pour une pente de $\simeq -0.2$, on pourra avancer de 5 carreaux pour descendre d'un carreau. Voir le site [WolframAlpha](https://www.wolframalpha.com) pour vérifier la vraisemblance de votre courbe.

9. (a) En étudiant la fonction $h : x \mapsto f(x) - x$, montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha) = \alpha \iff f(\alpha) - \alpha = 0 \iff h(\alpha) = 0$. Étudions donc les variations de h pour déterminer le nombre d'antécédents de 0.

On a pour tout x :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - 1 \\ &= e^{-x}g(e^x) - 1 \end{aligned}$$

Donc $h'(x) \geq 0 \iff e^{-x}g(e^x) \geq 1 \iff g(e^x) \geq e^x$. On constate que g étant décroissante, on a pour tout $y > 0$ $g(y) < y$ et donc $g(e^x) < e^x$. On en déduit $h'(x) < 0$: h est strictement décroissante, donc 0 a au plus un antécédent. De plus $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ et $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$. Par théorème des valeurs intermédiaires, 0 admet un

unique antécédent α

Remarque : on dit que α est un **point fixe** de f

- (b) Vérifier : $\alpha > 0$

On vérifie : $h(0) = f(0) = \ln(2) > 0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à l'intervalle $[0; +\infty[$, on déduit $\alpha > 0$

10. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ une expression de $f(x) + f'(x)$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $-\ln(2) \leq f'(x) \leq 0$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait déjà que $f(x) \leq 0$ (question 7)

$$\begin{aligned} f(x) + f'(x) &= e^{-x} \ln(1 + e^x) + e^{-x} \left(\frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x) \right) \\ &= e^{-x} \left(\ln(1 + e^x) + \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x) \right) \\ &= e^{-x} \frac{e^x}{1 + e^x} \\ &= \frac{1}{1 + e^x} \end{aligned}$$

Par ailleurs, du fait des variations de f , on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq \ln(2)$ i.e. $-f(x) \geq -\ln(2)$. Puisque $f'(x) = \frac{1}{1+e^x} - f(x)$ et que $\frac{1}{1+e^x} \geq 0$, on déduit : $f'(x) \geq -\ln(2)$

EXERCICE 2 - PRODUITS

On cherche à montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1)$$

1. Méthode 1 : justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} (2k-1) = 2(2n+1) \times 2^n \times \prod_{k=1}^n (2k-1)$ puis conclure par récurrence.

La formule se justifie en écrivant $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ et en isolant le dernier facteur du produit. On écrit ensuite par récurrence :

Initialisation : pour $n = 1$, $\prod_{k=1}^1 (1+k) = 1+1 = 2$ et d'autre part $2^1 \prod_{k=1}^1 (2k-1) = 2 \times (2 \times 1 - 1) = 2$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1)$. Alors :

$$\begin{aligned} 2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= 2(2n+1) \times 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1) \text{ d'après l'argument précédent} \\ &= 2 \times (2n+1) \times \prod_{k=1}^n (n+k) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 2(2n+1) \times \prod_{k=1}^n (n+1+k-1) \text{ (ici, je fais apparaître } n+1 \text{ dans le produit)} \\ &= 2(2n+1) \times \prod_{j=0}^{n-1} (n+1+j) \text{ en posant } j = k-1 \\ &= 2(2n+1)(n+1) \prod_{j=1}^{n-1} (n+1+j) \text{ en isolant } j=0 \\ &= (2n+1)(2n+2) \prod_{j=1}^{n-1} (n+1+j) \\ &= \prod_{j=1}^{n+1} (n+1+j) \text{ car } n+1+n = 2n+1 \text{ et } n+1+n+1 = 2n+2 \end{aligned}$$

La récurrence est établie. La formule est donc démontrée pour tout entier n .

2. Méthode 2 : Exprimer plus simplement $\prod_{k=1}^n (2k-1) \times \prod_{k=1}^n (2k)$ (on pourra commencer par les premières valeurs de n) puis conclure sans récurrence.

Avec le même raisonnement que dans le cours : $\prod_{k=1}^n (2k-1) \times \prod_{k=1}^n (2k) = \prod_{k=1}^{2n} k = (2n)!$ et d'autre part $\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n n!$.

On en déduit :

$$\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

c'est-à-dire : $2^n \prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{n!} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times n \times (n+1) \times \dots \times (2n)}{1 \times 2 \times \dots \times n} = (n+1)(n+2) \dots (2n) = \prod_{k=1}^n (n+k)$