Feuilles d'exercices n°3

Les exercices 3, 4, 14 ont été cherchés en classe.

Exercice 3 (Un exemple du cours - version express)**.**

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier : $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \boxed{\dfrac{1}{n(n+1)}}$

2. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$

   En utilisant la question précédente, on écrit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \text{ par télescopage}\end{aligned}$$

Exercice 4 (Des formules avec des sommes et des produits)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer ou simplifier les expressions suivantes :

1. $\prod\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\ln(k+1)}{\ln(k)}$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{\ln(k+1)}{\ln(k)} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(2)} \text{ par télescopage}$$

   Soyez bien prudent·es sur les formules avec des $\ln, \exp$, vous vous trompez **souvent** : ne pas hésiter à s'y entraîner spécifiquement avec les cahiers de calcul ! Et retenez que l'exponentielle se comporte exactement comme les puissances.

2. $\prod\limits_{k=1}^{n} e^{k/n}$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} e^{k/n} &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= e^{\frac{n+1}{2}}\end{aligned}$$

3. $\prod\limits_{k=1}^{n} 2k^2(k+1)$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} 2k^2(k+1) &= 2^n \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^2 \prod_{k=1}^{n} (k+1) \\ &= 2^n n!^2 \prod_{j=2}^{n+1} j \\ &= 2^n n!^2 (n+1)!\end{aligned}$$

4. $\sum\limits_{k=1}^{n} kk!$
Astuce : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)! - k! = (k+1)k! - k! = (k+1-1)k! = k \times k!$. On déduit alors pour tout entier n :

$$\sum_{k=1}^{n} kk! = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! = (n+1)! - 1! \boxed{= (n+1)! - 1}$$

La dernière égalité se déduit par télescopage

5. $\dfrac{\prod\limits_{k=2}^{n} (k-1)^3}{\prod\limits_{k=2}^{n} (k+1)^3}$ (ici, $n \geq 2$)
Faisons par exemple le changement de variable $j = k-1$ en haut et $j = k+1$ en bas :

$$\begin{aligned}
\frac{\prod\limits_{k=2}^{n} (k-1)^3}{\prod\limits_{k=2}^{n} (k+1)^3} &= \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1} j^3}{\prod\limits_{j=3}^{n+1} j^3} \\
&= \frac{1^3 \times 2^3 \times \prod\limits_{j=3}^{n-1} j^3}{(n+1)^3 \times n^3 \times \prod\limits_{j=3}^{n-1} j^3} \\
&= \frac{2^3}{n^3(n+1)^3} \\
&= \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^3
\end{aligned}$$

Exercice 8 (Avec des coefficients binômiaux). Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $p \leq n$. Montrer : $\sum\limits_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

La propriété se démontre par récurrence. On remarque qu'il ne s'agit pas de la même somme que celle de l'exercice 10 faite en classe : la variable de la somme est cette fois en haut du coefficient binômial.
<u>Initialisation :</u> pour $n = 0$, la seule possibilité est $p = 0$. On a alors :

- d'une part, $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{k}{0} = \binom{0}{0} = 1$
- d'autre part, $\binom{1}{1} = 1$

<u>Hérédité :</u> soit $n \in \mathbb{N}$ tel que **pour tout** $p \leq n$, $\sum\limits_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ *Remarque : ceci n'est toujours pas une récurrence forte*
On pose $p \in [|1; n+1|]$. Par disjonction de cas, supposons d'abord $p \leq n$ (pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\
&= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \binom{n+2}{p+1} \text{ (formule de Pascal)} \\
&= \binom{n+1+1}{p+1}
\end{aligned}$$

la récurrence est alors établie.
Supposons maintenant $p = n+1$. On a alors d'un côté $\sum\limits_{k=n+1}^{n+1} \binom{k}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ et d'autre part $\binom{n+1+1}{p+1} = \binom{n+2}{n+2} = 1$, la récurrence est également établie dans ce deuxième cas.
On en déduit l'égalité demandée pour tout n.

Exercice 13 (Plein d'exemples)**.** Calculer

1. $\sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} ij$
   (vu en classe)

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

2. $\sum\limits_{1 \leq 1 \leq j \leq n} \frac{i}{j}$
   (vu en classe)

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right)\end{aligned}$$

3. $\sum\limits_{1 \leq j,k \leq n} 2^{j-k}$

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq j,k\leq n} 2^{j-k} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2^j 2^{-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{j=1}^{n} 2^j \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{2-2^{n+1}}{1-2} \\
&= (2^{n+1}-2)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= (2^{n+1}-2) \times \frac{\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= (2^{n+1}-2) \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\sum_{1\leq k\leq j\leq n}(j-2k)$

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq k\leq j\leq n}(j-2k) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}(j-2k) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j} j - 2\sum_{k=1}^{j} k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j^2 - 2\frac{j(j+1)}{2}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(j^2 - j(j+1)) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-j) \\
&= -\frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

5. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j)$

Ici, il faut réfléchir un peu plus (pas de calcul possible !), on va séparer deux cas : $\min(i,j) = i$ si $i \leq j$ et $\min(i,j) = j$ si $j < i$ (et chaque couple est dans un de ces deux cas exactement). On sépare donc la somme en :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i + \sum_{i=j+1}^{n} j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2} + (n-j)j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j^2+j}{2} + nj - j^2\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(2n+1)j-j^2}{2}\right)\\
&= \frac{2n+1}{2}\sum_{j=1}^{n} j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2\\
&= \frac{2n+1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

On peut ensuite simplifier le calcul en mettant au même dénominateur (12 ici) et en développant/réduisant le numérateur.

6. $\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j|$

Tout pareil : on sépare les cas $i \leq j$ et $i > j$: $|i-j| = j-i$ dans le premier cas et $|i-j| = i-j$ dans le second cas. (on verra ça au chap 4!)
On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j| &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} |i-j| + \sum_{i=j+1}^{n} |i-j|\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(j-i) + \sum_{i=j+1}^{n} (i-j)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j^2 - \frac{j(j+1)}{2} + \frac{(n-j)(j+n+1)}{2} - (n-j)j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j^2 - \frac{j^2+j}{2} + \frac{-j^2-j+n(n+1)}{2} + j^2 - nj\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j^2 - (n+1)j + \frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (n+1)\frac{n(n+1)}{2} + n^2(n+1)
\end{aligned}$$

Idem : on peut maintenant développer, simplifier, réduire ...

◇ **Exercice 14** (Une astuce fréquente!).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{k} 2^k = k2^k$ puisque 2^k ne dépend pas ici de la variable de sommation (j). En sommant pour k allant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k$$

2. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k2^k$
   En utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k2^k &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{2^j - 2^{n+1}}{1-2} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(2^{n+1} - 2^j\right) \\ &= n2^{n+1} - \frac{2-2^{n+1}}{1-2} \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2\end{aligned}$$

Exercice 15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k! \leq (n+1)!$$

Par récurrence. Pour $n = 0$, $\sum_{k=1}^{0} k! = 0$ et d'autre part $(0+1)! = 1$: on a bien $0 \leq 1$.
Hérédité : soit n vérifiant l'inégalité. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k! &= \sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)! \\ &\leq (n+1)! + (n+1)! \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 2(n+1)!\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n+2 \geq 2$ et donc : $2(n+1)! \leq (n+2)(n+1)!$ d'où : $2(n+1)! \leq (n+2)!$ et la récurrence est établie.