

CHAPITRE 4 : L'ENSEMBLE \mathbb{R}

Analyse 1

I. INTERVALLES

Définition 1. On appelle intervalle réel toute partie de \mathbb{R} de l'un des types suivants (avec $a < b$) :

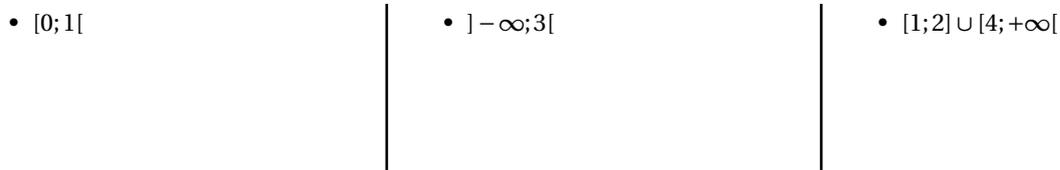
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
- $] -\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- $] -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- \mathbb{R}
- \emptyset
- $\{a\} = [a, a]$

Les intervalles $[a, b], [a, +\infty[,] -\infty, b], \mathbb{R}, \emptyset, \{a\}$ sont dits **fermés**.

Les intervalles $]a, b[,]a, +\infty[,] -\infty, b[, \mathbb{R}, \emptyset$ sont dits **ouverts**.

Remarque. Contrairement aux portes, les intervalles ne sont pas « soit fermés soit ouverts » (ex : $[-1;3[, \mathbb{R}, \emptyset$)

♣ **Dessins :**



Exemples. Notations :

- On note \mathbb{R}^+ l'ensemble $[0; +\infty[$, et \mathbb{R}^- l'ensemble $] -\infty; 0]$
- On note \mathbb{R}^* l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (qui n'est pas un intervalle) et de même \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*}

Remarque (Une caractérisation uniforme). I est un intervalle si et seulement si :

$$\forall (a, b) \in I^2, [a; b] \subset I$$

Dessin :

Intuitivement : I est un intervalle si il n'a pas de « trous »

II. PROPRIÉTÉ DE LA BORNE SUPÉRIEURE

1. Différentes bornes à différencier

Dans ce qui suit, \mathcal{A} est une partie de \mathbb{R}

a. Majorants, minorants

- On dit que M est un majorant de \mathcal{A} si : $\forall x \in \mathcal{A}, x \leq M$
- On dit que m est un minorant de \mathcal{A} si : $\forall x \in \mathcal{A}, m \leq x$

Définition 2. On dit que \mathcal{A} est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{A}, x \leq M$

On dit que \mathcal{A} est minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{A}, m \leq x$

On dit que \mathcal{A} est bornée si elle est majorée et minorée

Remarque. Un majorant est donc un élément « plus grand que tout le monde » dans \mathcal{A} . Remarque : il est supposé appartenir à \mathbb{R} (quantificateur!) et pas à \mathcal{A} nécessairement. Un majorant n'est pas unique!

- $[0; 1[$ est bornée car 0 est un minorant, 1 ou 1748 sont des majorants
- Exemples.**
- $] -\infty; 4]$ est majorée par 4, ou par 3π , mais pas minorée
 - \mathbb{Z} n'est ni majorée ni minorée

Exercice. Écrire la négation de « M majore \mathcal{A} », de « \mathcal{A} est majorée », de « \mathcal{A} est bornée » avec des quantificateurs

b. Minimum, maximum

Définition 3.

- On dit que M est le **maximum** de \mathcal{A} si : $M \in \mathcal{A}$ et $\forall x \in \mathcal{A}, x \leq M$
- On dit que m est le **minimum** de \mathcal{A} si : $m \in \mathcal{A}$ et $\forall x \in \mathcal{A}, m \leq x$

Remarque. • Ici, M et m sont supposés appartenir à \mathcal{A} et pas à \mathbb{R}

- Pour dire « le » maximum, il faut d'abord prouver que s'il existe, il est nécessairement unique

Méthode : démontrer que quelque chose est unique.

On prend deux éléments vérifiant la propriété (ici, deux maximums de \mathcal{A}) et on **montre** qu'ils sont **égaux**

Propriété 4. Dans \mathbb{N} , toute partie non vide admet un minimum. Toute partie majorée de \mathbb{N} admet un maximum. Toute partie bornée de \mathbb{Z} admet un minimum et un maximum.

♠ *Démonstration.* À partir des axiomes de \mathbb{N} , donc hors programme.

c. Bornes inférieures, supérieures

Exemple. Prenons $\mathcal{A} = [0; 1[$. \mathcal{A} est majorée et n'a pas de maximum (cf. exemples précédents). En particulier 1 n'est pas le maximum de \mathcal{A} , puisque $1 \notin \mathcal{A}$. On aimerait quand même dire qu'il a un rôle particulier ...

Définition 5.

- On dit que \mathcal{A} admet une **borne supérieure** si \mathcal{A} est majorée et que l'ensemble de ses éléments admet un minimum. On note alors $\sup(\mathcal{A})$ ce **plus petit majorant**
- On dit que \mathcal{A} admet une **borne inférieure** si \mathcal{A} est minorée et que l'ensemble de ses éléments admet un maximum. On note alors $\inf(\mathcal{A})$ ce **plus grand minorant**

♡ **Propriété 6** (Caractérisation de la borne supérieure).

$$M = \sup(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in \mathcal{A}, a \leq M \\ \forall y < M, \exists a \in \mathcal{A}, y < a \leq M \end{cases}$$

Démonstration. La première propriété traduit que M est un majorant de \mathcal{A} . La deuxième traduit que M est le plus petit des majorants, c'est-à-dire que tout nombre inférieur strictement à M n'est pas un majorant.

Remarque. Souvent, on choisira y de la forme $M - \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ moralement petit

♣ *Exercice.* En prenant $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, montrer que si \mathcal{A} admet une borne supérieure,

$$\exists (a_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sup(\mathcal{A})$$

2. Théorème

♡ **Théorème 7** (Théorème de la borne supérieure - Admis). Toute partie **majorée non vide** de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

Remarque. Ce théorème est une propriété très particulière de \mathbb{R} : c'est par exemple complètement faux dans \mathbb{Q} (avec une borne supérieure appartenant à \mathbb{Q})

Exemple. L'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ est non vide (pourquoi?) et majoré (pourquoi?) donc il admet une borne supérieure. Qu'a-t-on ainsi défini?

3. Conséquences

a. Propriété d'Archimède

Propriété 8.

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \exists n \in \mathbb{N}, na > b$$

Démonstration. Dans la feuille d'exercices.

b. Partie entière

Définition 9. On appelle **partie entière** d'un nombre x l'unique élément $n_x \in \mathbb{Z}$ vérifiant : $n_x \leq x < n_x + 1$

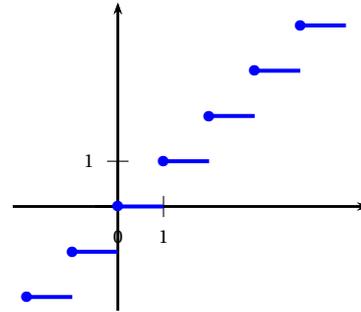
On note $n_x = \lfloor x \rfloor$

Remarque. Il faut d'abord montrer que cet élément unique existe!

Démonstration.

Unicité : Par l'absurde, supposer $n_1 < n_2$

Existence : En posant $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N}, n \leq x\}$



Remarque. Avec la partie entière, on peut aussi définir les développements décimaux (troncatures) d'un réel x comme étant la suite $(10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$

c. Propriétés de limites, de fonctions

Baucoup des propriétés que nous verrons sur les fonctions réelles utilisent, quelque part, cette propriété de la borne supérieure! (dans les futurs chapitres d'analyse : théorèmes de convergence monotone, des valeurs intermédiaires, théorème des accroissements finis en particulier)

III. DISTANCE DANS \mathbb{R}

1. Valeur absolue

a. Définition

Définition 10. On définit la **valeur absolue** de x par :

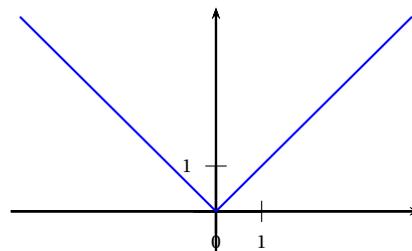
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples.

- $|3,57| = 3,57$

- $\forall x \in \mathbb{R}, |-1 - x^2| = 1 + x^2$

- $\forall x \in \mathbb{R}, |4 - x| = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x \leq 4 \\ x - 4 & \text{sinon} \end{cases}$



Exercice. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto |2x - 1|$ sur $[0; 2]$

b. Propriétés

Propriété 11.

- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ et $|-x| = |x|$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \max(x, -x)$
(et donc $|x| \geq x, |x| \geq -x$)
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x|^2 = x^2$ et $|x| = \sqrt{x^2}$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ ou $-x \geq a$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq |a| \Leftrightarrow x \geq a$ et $x \geq -a$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x||y|$

Démonstration. Partielle, le reste en TD. Valeur absolue = penser disjonction de cas!

2. Inégalité triangulaire

Propriété 12 (Inégalité triangulaire).

1. Pour tous réels $x, y,$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

2. Généralisation :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}, |x_1 + \dots + x_k| \leq |x_1| + \dots + |x_k|$$

Démonstration. 1. En élevant au carré

♣ 2. Par récurrence (dans le TD)

Exemple. Majorer : $\left| \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k)}{2^k} \right|$

♡ **Propriété 13.** Pour tous réels $x, y,$

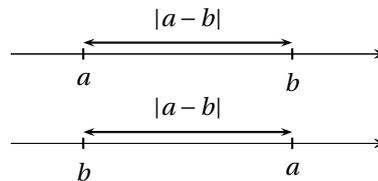
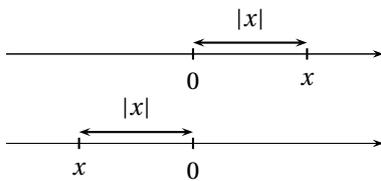
$$|x - y| \geq ||x| - |y||$$

Démonstration. En montrant $|x - y| \geq |x| - |y|$ et $|x - y| \geq |y| - |x|$ (cf. propriété 12)

3. Distance entre deux réels

Exercice. Donner un encadrement de x nécessaire et suffisant pour avoir $|x - 9| \leq 3$

Définition 14. Soient x, y deux réels. La **distance** de x à y est définie par $d(x, y) = |x - y|$



Exercice. Résoudre les inéquations :

1. $|4x - 7| \leq 2$

2. $|2x + 1| \geq 3$