

Feuille d'exercices n°4

Valeur absolue



Exercice 1 (Équations/inéquations avec une valeur absolue). Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $|2x + 3| = 5$
2. $|2x - 1| > 3$
3. $|x^2 - 1| < 1$
4. $|x - 1| + |x + 3| \leq 5$

Exercice 2 (Propriétés de la valeur absolue). Démontrer les propriétés du cours :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ et $|-x| = |x|$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \sqrt{x^2}$
3. $\forall (a, x) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x||y|$

Exercice 3. Donner une condition **nécessaire et suffisante** sur les réels a, b pour avoir

$$|a + b| = |a| + |b|$$

Exercice 4 (Inégalité triangulaire - généralisée à une somme de n termes).

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_n$ sont des réels, alors $|\sum_{k=1}^n x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$

Majorants, minorants, bornes supérieures et inférieures

Exercice 5. Dans les deux cas suivants, déterminer, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures de E . En cas d'existence, on précisera si ce sont des extremums.

1. $E = \{\frac{1}{x} | x \in]1; 3]\}$
2. $E = \{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice 6 (Plus d'exemples). Lesquels de ces ensembles sont-ils majorés ? minorés ? admettent-ils une borne supérieure ou inférieure ? Donner les bornes si elles existent.

1. $\{x^2 + x - 1 | x \in \mathbb{R}\}$
2. $\{x^2 + x + 1 | x \in \mathbb{R}\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2 \leq 0\}$
4. $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ où $u_n = 2^n$ si n pair et 2^{-n} si n est impair



Exercice 7 (Propriété d'Archimède). Démontrer la propriété du cours, en utilisant la propriété de la borne supérieure.

Exercice 8 (Point fixe). Soit f une fonction de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$. En considérant $A = \{x \in [0; 1] | f(x) \geq x\}$, montrer que f admet un **point fixe**, c'est-à-dire qu'il existe $m \in [0; 1]$ vérifiant : $f(m) = m$

Divers

Exercice 9 (Intersection d'intervalles). Soit $A = \mathbb{R}^-$, $B =]-3; 1[$, $C = [0; 2]$

1. Que sont $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$?
2. En utilisant la caractérisation du cours, montrer que si I et J sont des intervalles, $I \cap J$ est toujours un intervalle.

Exercice 10 (Partie fractionnaire). On appelle partie fractionnaire d'un réel x , parfois notée $\{x\}$ le nombre $x - \lfloor x \rfloor$.

1. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \{x\}$ définie sur $\mathbb{R}$
2. On dit que cette fonction est 1-périodique : écrire cette propriété en quantificateurs.

Exercice 11 (Implémentations Python).

1. Écrire une fonction qui prend en argument un réel x et renvoie sa valeur absolue (sans utiliser de fonction prédéfinie!)
2. Écrire une fonction qui prend en argument une liste et renvoie son minimum