Feuilles d'exercices n°4

Exercice 2 (Propriétés de la valeur absolue)**.** Démontrer les propriétés du cours :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ et $|-x| = |x|$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par disjonction de cas :
   - Si $x \geq 0$: $|x| = x$ et $x \geq 0$ donc $|x| \geq 0$. Par ailleurs, $-x$ est alors négatif et $|-x| = -(-x) = x = |x|$. Les deux propriétés sont vérifiées.
   - Si $x < 0$: $|x| = -x$ et $-x > 0$ donc $|x| > 0$. Par ailleurs, $-x$ est alors positif et $|-x| = -x = |x|$. Les deux propriétés sont aussi vérifiées.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \sqrt{x^2}$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq 0$, alors $|x|^2 = x^2$ et si $x < 0$, alors $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$. On a donc toujours : $|x|^2 = x^2$. Puisque (propriété précédente) $|x| \geq 0$: $|x| = \sqrt{x^2}$
3. $\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$
   Soit $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Par disjonction de cas :
   - Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$. Alors :
   $$\begin{aligned} |x| \leq a &\iff x \leq a \\ &\iff 0 \leq x \leq a \text{ car } x \text{ est positif} \\ &\iff x \in [-a; a] \end{aligned}$$
   - Si $x < 0$ alors $|x| = -x$. Alors :
   $$\begin{aligned} |x| \leq a &\iff -x \leq a \\ &\iff x \geq -a \\ &\iff 0 \geq x \geq -a \text{ car } x \text{ est négatif} \qquad \iff x \in [-a; a] \end{aligned}$$

   L'équivalence est montrée dans les deux cas.
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x||y|$
   Soient x, y deux réels. Raisonnons par disjonction de cas sur les signes de x et y :
   - Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$: alors $xy \geq 0$ (règles de signes) et $|xy| = xy$. D'autre part $|x||y| = xy$. On a vérifié $|xy| = |x||y|$
   - Si $x \geq 0$ et $y < 0$: alors $xy < 0$ donc $|xy| = -(xy) = -xy$ et $|x||y| = x \times (-y) = -xy$. Ainsi $|xy| = |x||y|$
   - De même si $x < 0$ et $y \geq 0$
   - Si $x < 0$ et $y < 0$: $xy > 0$ donc $|xy| = xy$ et d'autre part $|x||y| = (-x) \times (-y) = xy$ donc $|xy| = |x||y|$

Exercice 3. Donner une condition **nécessaire et suffisante** sur les réels a, b pour avoir

$$|a + b| = |a| + |b|$$

En reprenant la preuve de l'inégalité triangulaire, vérifier qu'une CNS est que a et b sont **de même signe** (deux positifs ou deux négatifs)

Exercice 4 (Inégalité triangulaire - généralisée à une somme de n termes)**.**
Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels, alors $|\sum_{k=1}^{n} x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$
Par récurrence.

- Initialisation : *(au choix) pour $n = 0$ c'est évident (et peu intéressant), pour $n = 1$ c'est évident (et à peine plus intéressant), et pour $n = 2$ c'est l'inégalité triangulaire du cours! C'est la propriété $n = 2$ qu'on va exploiter dans l'hérédité.*

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tous réels $(x_1, \ldots, x_n)$ l'inégalité soit vérifiée. Posons alors $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| &= \left|\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + x_{n+1}\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + |x_{n+1}| \text{ par inégalité triangulaire cas } n = 2 \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right) + |x_{n+1}| \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|
\end{aligned}$$

et la récurrence est établie.

— Conclusion : pour tout entier naturel n et tous réels $x_1, \ldots, x_n$, $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

♠ **Exercice 7** (Propriété d'Archimède). Démontrer la propriété du cours, en utilisant la propriété de la borne supérieure.
On rappelle la propriété qu'on veut démontrer :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \exists n \in \mathbb{N}, na > b$$

Je propose ici une démonstration par l'absurde.
Posons a, b deux réels strictement positifs. Supposons **par l'absurde** que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $na \leq b$. En posant $A = \{na | n \in \mathbb{N}\}$, A est alors un ensemble majoré par b et non vide (contient $0, a, 2a...$), donc admet une borne supérieure $s \in \mathbb{R}$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a \leq s$ donc $na \leq s - a$. $s - a$ est donc **un majorant** de A strictement inférieur à s, ce qui est **en contradiction** avec le fait que s soit la borne supérieure de A.

Exercice 8 (Point fixe). Soit f une fonction ⚠croissante de $[0;1]$ dans $[0;1]$. En considérant $A = \{x \in [0;1] | f(x) \geq x\}$, montrer que f admet un **point fixe**, c'est-à-dire qu'il existe $m \in [0;1]$ vérifiant : $f(m) = m$
En suivant l'indication de l'énoncé : posons $A = \{x \in [0;1] | f(x) \geq x$. A est **non vide** car $f(0) \in [0;1]$ donc $f(0) \geq 0$ et A est **majoré** car inclus dans $[0;1]$. D'après le théorème du cours, A admet une **borne supérieure** s. Montrons que $f(s) = s$.

— Montrons que $f(s) \geq s$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de borne supérieure, $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A : il existe $x \in A$ tel que $s - \varepsilon \leq x \leq s$. Par croissance de f :

$$f(s) \geq f(x)$$

De plus, $x \in A$ donc $f(x) \geq x \geq s - \varepsilon$ on obtient :

$$f(s) \geq f(x) \geq x \geq s - \varepsilon$$

On a montré que $f(s) \geq s - \varepsilon$ **pour tout** $\varepsilon > 0$, ce qui implique que $f(s) \geq s$.

— Montrons que $f(s) \leq s$ On a montré précédemment que $f(s) \geq s$. Par croissance de f : $f(f(s)) \geq f(s)$. On en déduit : $f(s) \in A$. Puisque s est la borne supérieure de A, $f(s) \leq s$

— Puisque $f(s) \geq s$ et $f(s) \leq s$, alors $f(s) = s$ et f **admet un point fixe.**

Remarque : c'est un exercice technique (surtout sans indications), si vous avez passé du temps à chercher sans trouver : c'est bien! Essayer de bien comprendre ce qui se passe dans la preuve. **Question bonus : trouver un contre exemple si on enlève l'hypothèse f croissante!**

Exercice 9 (Intersection d'intervalles). Soit $A = \mathbb{R}^-$, $B =]-3;1[$, $C = [0;2]$

1. Que sont $A \cap B, A \cap C, B \cap C$?
   $A \cap B =]-3;0]$, $A \cap C = \{0\}$ et $B \cap C = [0;1[$. En particulier, les 3 sont des intervalles.

2. En utilisant la caractérisation du cours, montrer que si I et J sont des intervalles, $I \cap J$ est toujours un intervalle.
   Soient I, J des intervalles. Soient $a, b \in I \cap J$. Puisque a, b sont dans I un intervalle, alors $[a; b] \subset I$. Puisque a, b sont dans J qui est un intervalle, alors $[a; b] \subset J$. On en déduit : $[a; b] \subset I \cap J$, ce qui implique que $I \cap J$ est un intervalle.
   Remarque : c'est un exemple de «preuve automatique» : pas de bonnes idées, juste la définition qu'on écrit dans un sens et dans l'autre. À savoir faire !

Exercice 11 (Implémentations Python)**.**

1. Écrire une fonction qui prend en argument un réel x et renvoie sa valeur absolue (sans utiliser de fonction prédéfinie !)

```
def valeur_absolue(x):
    if x >= 0:
        return x
    else:
        return (-1)*x
```

2. Écrire une fonction qui prend en argument une liste et renvoie son minimum
   Remarque : le seul lien avec le chapitre c'est que ça parle de minimum ... mais maintenant que vous avez fait les listes, vous devriez savoir faire !

```
def minimum(ma_liste):
    m = ma_liste[0]
    for k in range(len(ma_liste)):
        if ma_liste[k] <= m:
            m = ma_liste[k]
    return m
```

   Remarque : avec la 2ème ligne, la fonction ne convient que pour les listes non vides, faire un cas a part si vous voulez éviter les messages d'erreur