Analyse 2

Chapitre 5 : Suites de réels

I. Suites, premières propriétés

1. Définitions

Définition 1 (Suite, notations)**.**
On appelle **suite** une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ou, en général, une application $u : [|n_0 ; +\infty[| \to \mathbb{R}$, avec $n_0 \in \mathbb{Z}$. On notera u_n pour $u(n)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u_n)_{n\geqslant n_0}$ ou encore (u_n) pour la suite u.
On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$: $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Plus généralement, si toutes les valeurs de la suite sont dans une partie $\mathscr{A}$ de $\mathbb{R}$, $(u_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$

⚠ Ne pas confondre (u_n) et u_n : le premier est une suite, le deuxième un nombre

Exemples.
- Suite définie explicitement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n^2$ (on appelle cette expression de u_n son **terme général**)
- Suite définie par récurrence : $u_0 = 100$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 15$
- Suite implicite : pour tout $n \geqslant 2$, u_n est la plus grande solution de l'équation $x^2 - nx + 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

Exercice. Dans chacun des trois exemples précédents, comment peut-on justifier que la suite est bien définie ?
Que pensez-vous des exemples ci-dessous ?
1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{1-n}$
2. $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n)$
3. u_n est la solution de l'équation : $x^2 - x + n = 0$

2. Caractère borné ou non

Définition 2 (Suites bornées)**.** On dit qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$

Remarque. C'est équivalent à « $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble borné »

Exemples. $((-1)^n)$ ou $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ sont des suites bornées. $(n + \sin(n))$ n'est pas une suite bornée.

Propriété 3. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites bornées, alors $(u_n + v_n)$ est bornée.

Démonstration. Inégalité triangulaire !

3. Monotonie, variations

Définition 4. On dit que (u_n) est
- croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$
- décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_{n+1}$
- **strictement** croissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$ (de même pour strictement décroissante)
- (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou décroissante

♣ *Exercice.* Montrer que (u_n) est croissante **si et seulement si** : $\forall n, m \in \mathbb{N}, n \leqslant m \Rightarrow u_n \leqslant u_m$
Indication : on raisonnera par double implication, avec une récurrence dans un des deux sens.

Exemples. La suite (2^n) est strictement croissante. La suite constante égale à 3 est croissante **et** décroissante mais pas strictement croissante ou décroissante. La suite $((-1)^n)$ n'est pas monotone.

Propriété 5 (évidente)**.** Pour toute suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la propriété « (u_n) est croissante » est équivalente à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

De plus, **si** (u_n) **est strictement positive**, c'est aussi équivalent à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

♡ **Exemples.**

- Soit (u_n) définie par $u_n = -\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}$. Montrer que (u_n) est décroissante.
- Soit (v_n) définie par $v_0 = -10$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + n^2$. Montrer que (v_n) est croissante.
- Soit (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n$. Quel est le sens de variation de (w_n) ?
- Un exemple pour montrer l'importance de (u_n) strictement positive : que dire des variations de $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Propriété 6. Si f est une fonction croissante définie sur $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite monotone, alors $(f(u_n))$ est une suite monotone de même sens de variation que (u_n). Si f est décroissante, alors $(f(u_n))$ est monotone de sens de variation inverse.

Démonstration. Savoir refaire proprement (introduire toutes les variables)

Exemple. La suite $(\ln(n^2))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Propriété 7 (Cas des suites récurrentes)**.** Si f est une fonction croissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Démonstration. Par récurrence.

Remarque. Un exercice du TD traite le cas « f décroissante »

Exemple (Suite homographique)**.** On pose $u_n = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$. Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{4x-2}{x+1}$ puis les variations de (u_n).

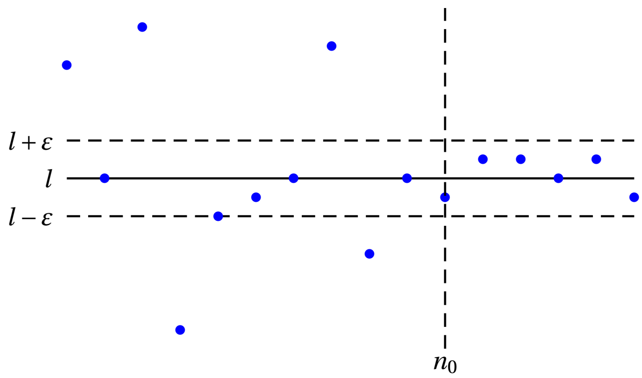
II. LIMITES

1. Définition

Définition 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et ℓ un réel. On dit que u_n tend vers ℓ, noté $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$$

« Tous les termes sont dans $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ sauf un nombre fini d'entre eux »



Exemple. La suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0. On note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

♡ **Propriété 9.** Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ vérifiant $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$. Alors :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Démonstration.

Définition 10. On dit qu'une suite (u_n)

- tend vers $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant M$$

- tend vers $-\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant M$$

Remarque. On dira que (u_n) diverge vers l'infini, ou tend vers l'infini, et pas qu'elle est convergente comme pour une limite finie.

Exemple. La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2$ tend vers $+\infty$

Exercice. Écrire la négation de « la suite (u_n) tend vers $+\infty$ » et montrer que la suite $(-1)^n n$ ne diverge pas vers l'infini.

2. Propriétés des suites convergentes

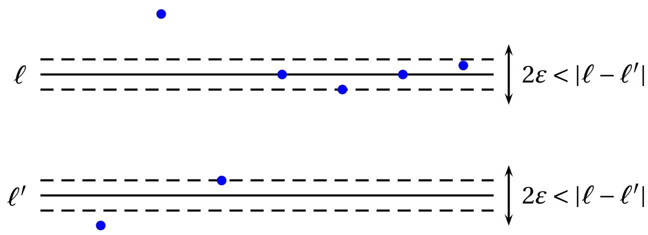
Propriété 11. Toute suite convergente est bornée

Démonstration. Avec $\varepsilon = 1$, en TD

Remarque. La réciproque est fausse : par exemple la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, mais ne converge pas!

Théorème 12 (Unicité de la limite)**.** Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^N$ et l, l' deux réels vérifiant $u_n \to l$ et $u_n \to l'$. Alors $l = l'$

Démonstration.



Remarque. Cette propriété sert à montrer **des égalités**, pas à déterminer la limite d'une suite. On peut cependant s'en servir pour trouver **la seule limite possible** :

Exercice. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$. **En admettant** que u_n converge, déterminer sa limite.

♡ **Propriété 13** (Conservation des inégalités LARGES par passage à la limite)**.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites et ℓ, ℓ' des réels tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$ et $u_n \to \ell$, $v_n \to \ell'$
Alors,

$$\ell \leqslant \ell'$$

Exemple. Contre-exemple pour les inégalités strictes : pour tout entier n, $\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

3. Opérations

Dans ce qui suit, $(u_n), (v_n)$ sont deux suites.

Limites de $u_n + v_n$:

limite de u_n \ limite de v_n	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

♡ *Démonstration.*

Limites de $u_n \times v_n$:

limite de u_n \ limite de v_n	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell\ell'$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$\pm\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

Démonstration. On introduit $|u_n v_n - \ell\ell'| = |u_n v_n - u_n\ell' + u_n\ell' - \ell\ell'|$

Limite de $\dfrac{u_n}{v_n}$:

limite de u_n \ limite de v_n	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell'}{\ell}$	$\pm\infty$	0	0
0	0	F.I.	0	0
$+\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.	F.I.
$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.	F.I.

On montre pour ça la :

Propriété 14. Si $u_n \to \ell \neq 0$, alors $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{\ell}$

La notion de **forme indéterminée** veut dire qu'on n'a (temporairement) pas trouvé la limite : à raison, puisque tout est possible.

Exercice.

- Que dire de $(u_n + v_n)$ si $u_n = n+17$ et $v_n = -n$?
  Peut-on trouver deux suites (u_n) et (v_n) avec $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ et $u_n + v_n \to 1256$?
- Que dire de $(u_n v_n)$ si $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$? Et si $v_n = \frac{1}{n^3}$?

Remarque. Il existe une forme indéterminée en plus : « 1^∞ » que l'on reverra en retravaillant les puissances ! (et les exponentielles, en fait)

4. Théorèmes de convergence

Remarque. Rappel : toutes les suites bornées ne sont pas convergentes, par exemple $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$
En revanche on a le théorème suivant :

♡ **Théorème 15** (Théorème de la limite monotone (TLM))**.** Toute suite bornée **monotone** converge.

Démonstration.

Remarque. Une leçon que l'on tire de la démonstration : dans le cas (u_n) croissante,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$$

(De même avec la borne inférieure dans le cas (u_n) décroissante)

♡ *Exercice.* Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$

- Montrer que pour tout n entier, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$
- Montrer que (u_n) est décroissante.
- Démontrer que (u_n) est une suite convergente. Que peut-on dire de sa limite ?

Propriété 16 (Une variante)**.** Toute suite monotone a une limite : finie si la suite est bornée et infinie sinon.

Théorème 17 (Gendarmes)**.** Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ des suites et ℓ un réel vérifiant :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
- $u_n \to \ell, w_n \to \ell$

Alors,

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Exemple. Soit (u_n) définie pour tout n par $u_n = \frac{5+\cos(n)}{n}$. Étudier la convergence de (u_n)

Démonstration.

Exercice. Montrer que si (u_n) tend vers 0 et que (v_n) est bornée, alors $(u_n v_n)$ tend vers 0

Propriété 18 (Avec un gendarme à l'infini)**.** Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites vérifiant

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$
- $u_n \to +\infty$

Alors,

$$v_n \to +\infty$$

Définition 19. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. On dit que ces suites sont **adjacentes** si

1. (u_n) est croissante
2. (v_n) est décroissante
3. $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Théorème 20. Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite

Démonstration.

Exercice. Soient (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 1, b_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Montrer que (a_n) et (b_n) sont bien définies et qu'elles sont adjacentes.

III. Suites particulières

1. Suites arithmético-géométriques

a. Suites arithmétiques

Définition 21 (Vocabulaire)**.** On appelle suite **arithmétique** une suite (a_n) vérifiant $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante. On appelle **raison** de la suite le nombre $r := a_1 - a_0$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n + r$.

Propriété 22. Soit (a_n) une suite arithmétique de raison r. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 + nr$$

Démonstration. Par récurrence.

Propriété 23 (Convergence)**.** Si $r > 0$, $a_n \to +\infty$. Si $r < 0, a_n \to -\infty$. Si $r = 0$, la suite est constante égale à a_0.

b. Suites géométriques

Définition 24 (Vocabulaire)**.** On appelle suite **géométrique** une suite (b_n) nulle ou ne s'annulant pas et vérifiant $(\frac{b_{n+1}}{b_n})$ constante. On appelle **raison** de la suite le nombre $q := \frac{b_1}{b_0}$. On a alors pour tout $n \in N, b_{n+1} = q \times b_n$

Propriété 25 (Forme explicite)**.** Soit (b_n) une suite arithmétique de raison q. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = b_0 q^n$$

Démonstration. Par récurrence

Propriété 26 (Convergence)**.** Si $|q| < 1$, alors $b_n \to 0$. Si $q > 1$, alors $b_n \to sgn(b_0)\infty$. Si $q = 1$, la suite est constante et si $q = -1$ elle n'a pas de limite.

Remarque. La convergence d'une suite géométrique est « rapide » en un sens quon verra plus tard. Comprendre : il faut peu d'étapes pour se rapprocher très près de la limite.

c. Le cas général

Définition 27. On appelle suite **arithmético-géométrique** une suite (u_n) telle qu'il existe a, b deux réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Exemple. On étudie la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

1. En utilisant les propriétés d'opérations sur les limites, montrer que si l est limite de (u_n), alors $l = 2$
2. On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que (u_n) est géométrique, en donner la raison.
3. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Théorème 28. Soient $a \neq 1$ et b deux réels et (u_n) une suite vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$. On pose $\ell = \frac{b}{1-a}$. Alors $(u_n - \ell)$ est une suite géométrique de raison a. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$$

Démonstration. À savoir refaire exemple par exemple en posant la bonne suite auxiliaire.

2. Suites récurrentes linéaires

a. Une étude de cas

Dans cette section sous la forme d'un exercice, nous étudions les suites qui correspondent à la définition : « à chaque étape, on fait la moyenne des deux termes précédents »

1. Traduire cette définition sous la forme d'une proposition quantifiée
2. On s'intéresse aux suites de la forme $(u_n) = q^n$ qui correspondent à cette définition. Déterminer les solutions q_1 et q_2 à ce problème (on choisira $q_1 < q_2$)
3. Montrer que si (u_n) et (v_n) sont solution du problème, alors pour tous a, b réels, $(au_n + bv_n)$ l'est également
4. Soit (u_n) une suite solution du problème et de la forme $(aq_1^n + bq_2^n)$. Exprimer a et b en fonction de u_0 et u_1
5. Supposons que $u_0 = 2$ et $u_1 = -4$. Vérifier que la forme explicite ainsi obtenue convient.
6. Déterminer la limite de cette suite

b. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 29. On appelle suite **récurrente linéaire d'ordre 2** toute suite de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle **polynôme caractéristique** de cette suite le polynôme $P(x) = x^2 - ax - b$

♡ **Théorème 30.** Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique P

- Si P a deux racines réelles distinctes α et β, alors il existe λ, μ deux réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$$

- Si P a une seule racine double réelle γ, alors il existe λ, μ deux réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu)\gamma^n$$

♣ *Exercice.* Trouver la forme explicite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1, u_2 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

Remarque. Et si le polynôme n'a pas de racine réelle ?