

Devoir Maison n°3 - Une généralisation des formules du TD

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$S_i(n) = \sum_{k=0}^n k^i$$

1. Premières valeurs de n

(a) Rappeler les valeurs de $S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ (d'après le cours et le TD)

$$S_0(n) = \sum_{k=0}^n k^0 = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$$

$$S_1(n) = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2(n) = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

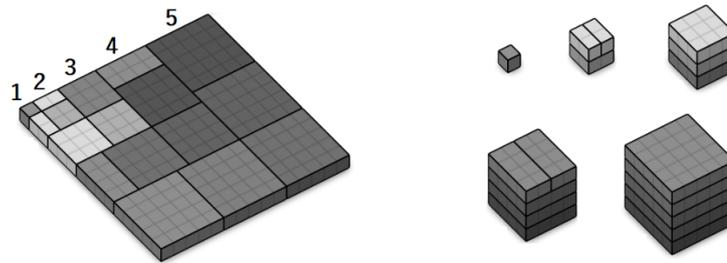
$$S_3(n) = \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Pour ces 4 résultats, on ne demandait aucune démonstration, juste de retrouver la valeur dans le cours / TD.

(b) On observe :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_3(n) = S_1(n)^2$$

Expliquer le dessin suivant :



L'idée générale :

- À gauche, un carré de côté $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, dont la surface est $(1 + \dots + 5)^2$. Le nombre de carreaux représente donc $S_1(n)^2$
- À droite, des cubes de côté $1, 2, 3, 4, 5$. Le nombre de cubes est donc $S_3(n)$
- Le dessin illustre l'égalité en montrant que les carreaux de gauche peuvent être réorganisés pour former les cubes de droite : pour les nombres impairs c'est le plus clair, il y a par exemple 5 carrés de côté 5, ce qui forme un cube de côté 5. Expliquer la transformation très précisément, c'est difficile à faire de façon claire et convaincante ...

2. **Formule de récurrence** Posons aussi :

$$T_i(n) = \sum_{k=1}^n ((k+1)^{i+1} - k^{i+1})$$

(a) En remarquant un télescopage, simplifier l'expression de $T_i(n)$

$$T_i(n) = (n+1)^{i+1} - 1^{i+1} = (n+1)^{i+1} - 1$$

(b) Dédurre :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{i+1} = S_{i+1}(n) + (n+1)^{i+1} - 1$$

On écrit :

$$\begin{aligned} T_i(n) &= \sum_{k=1}^n ((k+1)^{i+1} - k^{i+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (k+1)^{i+1} - \sum_{k=1}^n k^{i+1} \\ &= \sum_{k=1}^n (k+1)^{i+1} - S_{i+1}(n) \end{aligned}$$

La dernière égalité est valable car pour $i \geq 0, i+1 \geq 1$ et donc $0^{i+1} = 0$ (on peut donc rajouter le terme d'indice $k = 0$ sans changer la valeur de la somme) D'autre part,

$$T_i(n) = (n+1)^{i+1} - 1$$

On peut donc écrire :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{i+1} - S_{i+1}(n) = (n+1)^{i+1} - 1$$

En ajoutant $S_{i+1}(n)$ aux deux membres de cette égalité, on obtient l'égalité voulue.

(c) Grâce au binôme de Newton, développer : $(k+1)^{i+1}$.

On appellera q la variable muette de sommation

$$(k+1)^{i+1} = \sum_{q=0}^{i+1} \binom{i+1}{q} k^q$$

On omet ici 1^{i+1-q} qui est constant égal à 1

(d) Dédurre de la question précédente :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{i+1} = S_{i+1}(n) + (i+1)S_i(n) + \sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n)$$

Indication : on utilisera une interversion de somme double.

On prend son courage à deux mains pour ce calcul et on y va :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k+1)^{i+1} &= \sum_{k=1}^n \sum_{q=0}^{i+1} \binom{i+1}{q} k^q \\ &= \sum_{q=0}^{i+1} \sum_{k=1}^n \binom{i+1}{q} k^q \\ &= \sum_{q=0}^{i+1} \binom{i+1}{q} \sum_{k=1}^n k^q \\ &= \sum_{q=0}^{i+1} \binom{i+1}{q} S_q(n) \\ &= \sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n) + \binom{i+1}{i} S_i(n) + \binom{i+1}{i+1} S_{i+1}(n) \\ &= \sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n) + (i+1)S_i(n) + S_{i+1}(n) \end{aligned}$$

Dans les deux dernières lignes on isole les termes $q = i$ et $q = i+1$

(e) À l'aide des égalités montrées aux questions 2b et 2d, montrer :

$$S_i(n) = \frac{1}{i+1} \left((n+1)^{i+1} - 1 - \sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n) \right)$$

En regroupant les deux questions citées, on obtient :

$$S_{i+1}(n) + (n+1)^{i+1} - 1 = S_{i+1}(n) + (i+1)S_i(n) + \sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n)$$

On simplifie $S_{i+1}(n)$ des deux côtés de l'égalité et on isole $S_i(n)$:

$$(i+1)S_i(n) = (n+1)^{i+1} - 1 - \sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n)$$

Puis en divisant par $i + 1 (\neq 0)$:

$$S_i(n) = \frac{1}{i+1} \left((n+1)^{i+1} - 1 - \sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n) \right)$$

3. **Application** Démontrer :

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

Pour $i = 4$ dans la question précédente :

$$\begin{aligned} S_4(n) &= \frac{1}{5} \left((n+1)^5 - 1 - \sum_{q=0}^3 \binom{5}{q} S_q(n) \right) \\ &= \frac{1}{5} \left((n+1)^5 - 1 - S_0(n) - 5S_1(n) - 10S_2(n) - 10S_3(n) \right) \\ &= \frac{1}{5} \left((n+1)^5 - 1 - (n+1) - 5 \frac{n(n+1)}{2} - 10 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 10 \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \end{aligned}$$

Et maintenant ... il reste à tout développer et regrouper par degré. On trouve ce qui était voulu à un $\frac{1}{5}$ près, ce qui est sûrement lié à une erreur d'indice dans une des sommes (?)

4. **Simulations numériques** On écrit un programme Python permettant de calculer : $\frac{S_i(n)}{\frac{n^{i+1}}{i+1}}$.

(a) Compléter le code suivant :

```
i = int(input(" entrer une valeur de i "))
n = int(input(" entrer une valeur de n "))
s = 0
for k in range(n+1):
    s = s+k**i
print(s/(n**(i+1)/(i+1)))
```

(b) Recopier le code obtenu dans un éditeur Python et tester avec plusieurs valeurs de i et plusieurs (grandes) valeurs de n . Qu'observe-t-on ?

Le résultat semble s'approcher de 1 Remarque : plus tard dans l'année on reformulera : $S_i(n) \sim \frac{n^{i+1}}{i+1}$