

Feuilles d'exercices n°5

Rappel : le projet c'est : environ 1h pour des corrections d'exos en majorité faites par **vous**, sur des exos que la majorité **a cherché** à l'avance ou au moins regardé en diagonale pour savoir «de quoi ça parle», puis environ 1h pour chercher d'autres exos avec les voisin-es. Ce n'est pas «la prof corrige au tableau des exos qu'on a jamais vus pendant 2h» ni «2h pour chercher 2 exos par semaine et lire les corrigés de tout le reste plus tard». Ça nécessite que vous organisiez votre temps pour **chercher** et lire les exos le jeudi au plus tard, et que vous vous décidiez à présenter des exercices, y compris incomplets ou partiellement faux.

Exercice 1. Dans chaque cas, déterminer les variations de la suite (u_n) dont on donne le terme général.

1. $u_n = n^2$

On posera n un entier arbitraire pour toutes les questions de l'exercice. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

2. $u_n = 5 \times 0,2^n + 3$

$u_{n+1} - u_n = 5 \times 0,2^{n+1} + 3 - 5 \times 0,2^n - 3 = 5 \times 0,2^n \times (0,2 - 1) = -4 \times 0,2^n \leq 0$ donc (u_n) est décroissante.

3. $u_n = \frac{3n}{n+1}$

(u_n) est une suite strictement positive (pour $n \geq 1$) et : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(n+1) \times (n+1)}{3n \times (n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$ Or $n^2+2n+1 \geq n^2+2n$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et (u_n) est croissante.

4. $u_n = \frac{2n+1}{3n+4}$

De même (u_n) est positive et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+3)(3n+4)}{(3n+7)(2n+1)} = \frac{6n^2+17n+12}{6n^2+17n+7} \geq 1$$

Ainsi (u_n) est croissante.

5. $u_n = \frac{3}{7^n} + 1$ $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{7^{n+1}} + 1 - \frac{3}{7^n} - 1 = \frac{3}{7^n} \left(\frac{1}{7} - 1 \right) \leq 0$ donc (u_n) est décroissante.

6. $u_n = \frac{n}{2^n}$

Pour $n \geq 1$, $u_n > 0$ et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

Si $n \geq 1$, alors $n+1 \geq n+n$ et $u_{n+1} \leq u_n$, ce qui permet d'affirmer que (u_n) est décroissante à partir de $n = 1$.
Puisque $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{1}{2}$, la suite est croissante au premier rang.

Exercice 3 (Deux suites). On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$a_0 = 1, b_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + b_n \end{cases}$$

1. Exprimer a_n en fonction de n .

(a_n) est une suite géométrique et on peut donc écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$

2. Calculer alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k)$.

D'après l'énoncé, pour tout $k \in \mathbb{N}, b_{k+1} - b_k = \frac{1}{4} a_k = \frac{1}{4^{k+1}}$. Ainsi, pour $n > 0$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

3. En déduire l'expression de b_n en fonction de n .

Dans la question précédente, on a calculé $\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k)$. Or, par télescopage, cette somme est égale à $b_n - b_0 = b_n$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

et cette expression reste valable pour $n = 0$

Exercice 4 (Vrai/faux (justifier)). Ici l'objectif est de réviser ces suites de référence.

1. La somme de deux suites arithmétiques est arithmétique.
Vrai. En introduisant les bonnes variables, $(u_0 + nr_1) + (v_0 + nr_2) = (u_0 + v_0) + n(r_1 + r_2)$ géométrique de raison $r_1 + r_2$
2. Le produit de deux suites arithmétiques est arithmétique.
Faux. Par exemple $u_n = n$ et $v_n = n$ donne $u_n v_n = n^2$ et $u_2 v_2 - u_1 v_1 = 3 \neq u_1 v_1 - u_0 v_0 = 1$ (accroissements non constants)
3. La somme de deux suites géométriques est géométrique.
Faux. Idem pour $u_n = 2^n$ et $v_n = 1^n = 1$. $u_n + v_n = 2^n + 1$ et $v_2 u_2 / u_1 v_1 = 5/3 \neq u_1 v_1 / u_0 v_0 = 3/2$
4. Le produit de deux suites géométriques est géométrique.
Vrai. En introduisant les bonnes variables, $u_0 q_1^n \times v_0 q_2^n = (u_0 v_0) \times (q_1 q_2)^n$ géométrique de raison $q_1 q_2$
5. Si (u_n) est géométrique de raison q , alors $(-u_n)$ est géométrique de raison $-q$.
Faux. $(-u_n)$ est géométrique, mais toujours de raison q .

Exercice 5. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 7 vérifiant $u_{100} = 540$. Déterminer u_{40}
 $u_{100} = u_{40} \times 7^{60}$ donc $u_{40} = \frac{540}{7^{60}}$.

Exercice 8. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$$

1. Montrer que (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+1} + 2v_{n+1} \\ &= 3u_n + 2v_n + 2u_n + 4v_n \\ &= 5(u_n + 2v_n) - 4v_n \\ &= 5v_{n+1} - 4v_n \end{aligned}$$

(v_n) est donc bien récurrente linéaire.

2. Déterminer v_n en fonction de n puis u_n .
D'après le théorème du cours : puisque les racines de $x^2 - 5x + 4$ sont 4 et 1, il existe deux réels λ, μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \lambda 4^n + \mu$$

(avec $1^0 = 1$) Avec les deux premières valeurs de v_n , on trouve : $v_0 = \lambda + \mu = 1$ et $v_1 = 4\lambda + \mu = 3$ d'où $\mu = \frac{1}{3}$ et $\lambda = \frac{2}{3}$. Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2}{3} \times 4^n + \frac{1}{3}$$

On cherche maintenant une expression de u_n . En utilisant la formule de récurrence de (v_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_{n+1} - 2v_n = \frac{2}{3} \times 4^{n+1} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \times 4^n - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \times 4^n - \frac{1}{3}$$

Exercice 11 (Limites de suites). Calculer, si elles existent, les limites des suites ci-dessous.

Remarque : cet exercice recoupe l'essentiel des méthodes du cours : factoriser par les termes prépondérants pour lever les indéterminations ou faire apparaître des croissances comparées classiques, utiliser la quantité conjuguée, majorer/minorer/encadrer et utiliser le théorème des gendarmes. À part la question 6 et cette limite du ln, le reste est à savoir faire (sans y passer des heures!)

1. $u_n = \frac{2n-5}{3n+1}$

On introduit n pour toutes les questions suivantes. $u_n = \frac{2n(1-\frac{5}{2n})}{3n(1+\frac{1}{3n})} = \frac{2}{3} \times \frac{1-\frac{5}{2n}}{1+\frac{1}{3n}} \rightarrow \frac{2}{3}$

2. $u_n = 2n - e^n$

$u_n = e^n(2ne^{-n} - 1)$. Ici $2ne^{-n}$ tend vers 0 par croissance comparée donc l'ensemble tend vers $-\infty$

3. $u_n = (-5)^n + 3n$

$u_n = (-5)^n \left(1 + 3 \frac{n}{(-5)^n}\right)$ Or, pour n pair ou impair $\frac{n}{(-5)^n}$ tend vers 0 par croissance comparée et donc $1 + \frac{n}{(-5)^n}$ tend vers 1 et est donc à partir d'un moment plus grand que $\frac{1}{2}$ (par exemple). On aura alors pour n impair $u_n \leq -\frac{5^n}{2}$ et pour n pair $u_n \geq \frac{5^n}{2}$ et donc par comparaison les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont des limites différentes : (u_n) n'a pas de limite.

Remarque : celle-ci est simple à intuiter et plus difficile à rédiger!

4. $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ où $0 \leq a < b$.

$u_n = \frac{b^n \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right)}{b^n \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right)} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}$ Or puisque $b > a \geq 0$, $\frac{a}{b} < 1$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^n \rightarrow 0$ (suites géométriques). Ainsi, $u_n \rightarrow -1$

5. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

Méthode «quantité conjuguée».

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \rightarrow +\infty$$

6. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Question surtout là pour illustrer la «forme indéterminée» 1^∞ . On peut être tenté-e de répondre 1, et c'est faux! Certain-es savent que la réponse est e , je n'ai pas trouvé de jolie animation vidéo pour raconter en quoi ceci est naturel quand on essaie de faire de façon «incrémentale» une fonction qui vérifie $f'(x) = x$ (ce qu'on appelle la méthode d'Euler), venez me demander si ça vous intéresse.

Analytiquement, on peut écrire :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

En posant $x = \frac{1}{n}$, la quantité à l'intérieur de l'exponentielle est de la forme $\frac{\ln(1+x)}{x}$ qui tend vers 1 quand x tend vers 0 : on verra ça et on s'habitue à passer toutes ces puissances sous forme «exponentielle» dans le futur!

7. $u_n = \frac{e^n}{n^n}$

C'est une forme indéterminée. Une idée est d'écrire : $u_n = \left(\frac{e}{n}\right)^n$ où cette fois $\frac{e}{n}$ tend vers 0 et n vers $+\infty$: ici, ce n'est pas la forme 1^∞ mais 0^∞ , qui tend vers 0. On peut s'en convaincre en écrivant par exemple que pour $n \geq 6$, u_n est majorée par $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ car $e \leq 3$. On utilise ensuite le théorème des gendarmes.

8. $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$

Une majoration très grossière : $S_n \geq \sum_{k=1}^n \sqrt{1} \geq n$ donc $S_n \rightarrow +\infty$

9. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$

Fait en classe en écrivant $1 \leq k \leq n$ et en encadrant S_n : le théorème des gendarmes donnait $S_n \rightarrow 1$

Exercice 12 (Irrationalité de e). Soient les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n =$

$u_n + \frac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Fait en classe.

2. Donner une approximation à 10^{-3} près de leur limite.

Avec une calculatrice ou Python, on calcule les premiers termes jusqu'à ce que l'écart entre les deux soit inférieur à 10^{-3} et on trouve que la limite est proche de 2,718, c'est-à-dire proche de e , d'où la conjecture admise ensuite.

3. On admet que cette limite est e . Montrer que e n'est pas un nombre rationnel.

Par l'absurde, supposons qu'il existe p, q deux entiers tels que $e = \frac{p}{q}$. Alors, au rang q , les deux suites étant strictement monotones :

$$u_q < \frac{p}{q} < v_q$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + \frac{1}{q!}$$

En multipliant par $q!$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} < p(q-1)! < \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + 1$$

c'est-à-dire que l'entier $p(q-1)!$ est strictement compris entre deux entiers successifs (pour tout $k \leq q$, $\frac{q!}{k!}$ est un entier), ce qui est une **contradiction**. Ainsi, e est irrationnel.

Remarque : en un sens pas évident à formaliser, la plupart des nombres sont irrationnels. En revanche, prouver qu'un nombre en particulier est irrationnel n'est pas évident, on l'a fait pour $\sqrt{2}$ et d'autres racines seraient irrationnelles sans beaucoup d'effort supplémentaire, on l'a maintenant fait pour e , et à part ça, on ne sait pas vraiment faire...

Indication : Raisonner par l'absurde, encadrer e par u_n et v_n pour un certain n fixé et multiplier les inégalités par $n!$

Exercice 14. On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq n$. En déduire la limite de (u_n) .

Puisque (u_n) est définie par récurrence, on va devoir faire une récurrence. Pour $u_1 = 2u_0 + 0 - 1 = 1$, la propriété est initialisée. Pour un n quelconque vérifiant l'inégalité,

$$u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \geq 2n + n - 1 = 3n - 1$$

et $3n - 1 \geq n + 1$ ssi $2n \geq 2$ ssi $n \geq 1$. La propriété est donc héréditaire.

On peut donc par comparaison affirmer : $u_n \rightarrow +\infty$

2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Soit $n \geq 1$.

$$u_{n+1} - u_n = u_n + n - 1 \geq 2n - 1 \geq 0$$

Ainsi, (u_n) est croissante.

3. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n + u_n$.

- (a) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

«nature est un terme flou qui pourrait vouloir dire «convergente ou divergente», mais ici : $v_{n+1} = u_{n+1} + n + 1 = 2u_n + 2n = 2v_n$. Ce qui est attendu est : (v_n) est une suite géométrique (de raison 2)

- (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 2^n = 2^n$ et donc $u_n = 2^n - n$

4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{2u_n + n - 2}{2^n} = \frac{2u_n - 2}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

d'où l'égalité demandée.

- (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1} - 1}{2^k} - \frac{u_k - 1}{2^{k-1}} \text{ d'après la question a} \\ &= \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} - \frac{u_0 - 1}{2^{-1}} \text{ par télescopage} \\ &= \frac{2^n - n - 1}{2^{n-1}} - 0 \text{ d'après la question 3b} \\ &= \frac{2^n - n - 1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

◇ **Exercice 15.** Soit a et b des réels vérifiant $0 < a < b$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = a, v_0 = b, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont bien définis, strictement positifs et vérifient :

$$0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$$

Par récurrence, montrons toutes ces propriétés.

Initialisation : u_0, v_0 sont bien définis et strictement positifs par hypothèse, vérifient $v_0 - u_0 = b - a \geq 0$ et $\frac{1}{2^0}(b - a) = b - a = v_0 - u_0$. L'initialisation est bien vérifiée.

Hérédité : soit n un entier vérifiant ces propriétés.

Puisque $u_n > 0$ et $v_n > 0$, $u_n v_n$ et $u_n + v_n$ sont strictement positifs. Cela garantit que u_{n+1} est bien défini. Par ailleurs, v_{n+1} est clairement défini et les deux sont strictement positifs (règles de signes).

Regardons maintenant :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

Puisque $(v_n - u_n)^2$ est un carré et que $u_n + v_n > 0$, on déduit $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$. Intéressons nous maintenant à la deuxième partie de l'inégalité :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{v_n - u_n}{2(u_n + v_n)} \times (v_n - u_n) \\ &\leq \frac{v_n - u_n}{2(u_n + v_n)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) \text{ car } v_n - u_n \geq 0 + \text{hypothèse de réc.} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) \text{ car } v_n - u_n \leq v_n + u_n \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b - a) \end{aligned}$$

et la récurrence est établie.

2. Étudier la monotonie de (u_n) et (v_n) .

Puisque (u_n) et (v_n) sont strictement positives, on a le choix de la méthode. On peut par exemple regarder :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2v_n}{u_n + v_n}$$

Puisque $u_n \leq v_n$, $2v_n \geq u_n + v_n$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et (u_n) est croissante.

De plus, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$ donc (v_n) est décroissante.

3. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ .

D'après la question 1, $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$. Puisque $\frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0 et par théorème des gendarmes $v_n - u_n$ tend vers 0. On peut donc appliquer le **théorème des suites adjacentes** pour dire que (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes de même limite ℓ .

4. En étudiant la suite $(u_n v_n)$, déterminer la valeur de ℓ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} v_{n+1} = u_n v_n$: $(u_n v_n)$ est constante égale à $u_0 v_0 = ab$. Ainsi, $u_n v_n = ab \rightarrow \ell^2$ et par unicité de la limite $\ell^2 = ab$. Puisque $\ell \geq 0$ (conservation des inégalités larges) on déduit : $\ell = \sqrt{ab}$. C'est donc une méthode pour approximer des racines : on peut prendre $a = 1, b = 2$ et trouver des encadrements successifs de $\sqrt{2}$

Exercice 16. Soit \mathcal{A} un ensemble de \mathbb{R} admettant une borne supérieure M . Montrer qu'il existe une suite d'éléments de \mathcal{A} ayant M comme limite, c'est-à-dire :

$$\exists (a_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, a_n \rightarrow M$$

Puisque $M = \sup(A)$, pour tout $n \geq 1$, $M - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de A : $\exists a_n \in \mathcal{A}, M - \frac{1}{n} \leq a_n \leq M$. Par théorème des gendarmes, on a donc $a_n \rightarrow M$.

C'est-à-dire que si contrairement au maximum la borne sup n'est pas nécessairement incluse dans A , on peut tout de même trouver une suite d'éléments qui s'en approchent.

Exercice 17 (Cas f décroissante). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **décroissante** et (u_n) une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que $f \circ f$ est croissante

Savoir refaire : soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Par décroissance de f , $f(x) \geq f(y)$. Par décroissance de f à nouveau, $f(f(x)) \leq f(f(y))$ c'est-à-dire $(f \circ f)(x) \leq (f \circ f)(y)$: f est croissante.

2. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = (f \circ f)(u_{2n})$. Ainsi, (u_{2n}) est récurrente avec $f \circ f$ croissante : d'après le cours, (u_{2n}) est monotone. Il en va de même pour (u_{2n+1}) avec le même raisonnement.

3. Ont-elles parfois/jamais/toujours le même sens de variation?

Jamais! (sauf si les deux sont constantes)

Si $u_{2n} \leq u_{2(n+2)}$ alors en appliquant f décroissante on obtient $u_{2n+1} \leq u_{2(n+1)+1}$ et inversement.

4. Petits exemples : étudier les cas $f : x \mapsto -2x$ et $f : x \mapsto -x$

♠ **Exercice 18** (Sous-suites). Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \sup\{u_p | p \geq n\}$ et $y_n = \inf\{u_p | p \geq n\}$

1. Montrer que ces deux suites (x_n) et (y_n) sont bien définies.

Pour ce faire, on justifie que $\{u_p | p \geq n\}$ est non vide et borné. Cet ensemble aura ensuite une borne supérieure et une borne inférieure.

2. Montrer que (x_n) est décroissante et (y_n) croissante

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{u_p | p \geq n+1\} \subset \{u_p | p \geq n\}$. La borne supérieure d'un ensemble «plus petit» sera donc plus petite et la borne inférieure d'un ensemble «plus petit» sera plus grande.

3. Montrer que (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers des valeurs α, β avec $\alpha \geq \beta$

Puisque (u_n) est bornée, (x_n) et (y_n) le sont par les mêmes valeurs, et d'après la question précédente, les suites sont monotones, elles convergent donc. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq y_n$ et cette inégalité passe à la limite.

4. Montrer que si $\alpha = \beta$, alors (u_n) converge.

Supposons $\alpha = \beta$. Posons $\varepsilon > 0$. Pour un certain n_0 , on a alors $x_{n_0} \in [\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon]$ et de même $y_{n_0} \in [\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon]$. Or pour tout $p \geq n_0$, $u_p \leq x_{n_0}$ et $u_p \geq y_{n_0}$ par définition de ces deux suites, d'où $u_p \in [\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon]$: (u_n) converge.