# Feuille d'exercices n°6

## Calculs : limites et continuité

**Exercice 1** (Trouver des limites). Déterminer les limites suivantes :

1. $\frac{x^4-x^3+1}{2-3x^4}$ en $\pm\infty$
2. $x\ln(\sin(x))$ en $0^+$
3. $\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$ en 1
4. $x^5e^{-x^2}$ en $+\infty$
5. $\frac{x\ln x+7}{x^2+4}$ en $+\infty$
6. $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1
7. $\frac{x+\cos(x)}{x+\sin(x)}$ en $+\infty$
8. $\ln(x)\ln(\ln(x))$ en $1^+$
9. $\frac{\sin(9x)}{\sin(3x)}$ en 0

♢ **Exercice 2** (Limites - avec des parties entières). Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad , \quad g : x \mapsto x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad , \quad h : x \mapsto x^2\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

♢ **Exercice 3.** Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & \text{si } x > 1 \\ x & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} (x-2)\ln|x-2|+3 & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$
3. $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x-\lfloor x \rfloor)^2$

**Exercice 4** (Démonstrations : croissances comparées). Soit $g$ la fonction (dérivable) définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x)=\sqrt{x}-\ln(x)$

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g(x) \geqslant 0$
2. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$
3. Conclure sur la limite à l'infini de $\frac{\ln(x)}{x}$
4. En posant $u=\frac{1}{x}$, montrer $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$
5. En posant $u=e^x$, montrer $\frac{x}{e^x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$

## Applications : études de fonctions, études graphiques

♢ **Exercice 5** (D.E.S.). On considère la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{x^3-x}$

1. Sur quel ensemble $E$ peut-on définir cette fonction ?
2. On cherche à montrer qu'il existe un unique $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in E, f(x) = \frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$$

   On raisonnera par analyse-synthèse.
   (a) En étudiant la limite en 0 de $xf(x)$, justifier qu'on a nécessairement $a=-1$
   (b) De la même façon, déterminer une condition nécessaire sur $b$ et $c$ pour qu'une telle égalité soit vraie.
   (c) Conclure.

**Exercice 6** (Fonction réciproque - courbe). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \frac{2}{3x-1} \end{array}$

1. Étudier les variations et les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition
2. Tracer l'allure de la courbe de $f$ dans un repère orthonormé
3. Montrer que $f$ est bijective.
4. Par le calcul, donner une expression de $f^{-1}$
5. Tracer de même l'allure de la courbe de $f^{-1}$ dans le même repère
6. Tracer la droite d'équation $y=x$ et vérifier (à l'œil nu) que les deux courbes sont bien symétriques l'une de l'autre par rapport à cette droite.

♡ **Exercice 7** (Asymptotes obliques)**.** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que $f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ si il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) - (ax+b) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Dans ce cas, **l'équation** de l'asymptote oblique est : $y = ax+b$

1. Justifier l'expression «asymptote oblique»
2. Montrer que si $f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax+b$, alors
$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$$
3. Que dire des asymptotes obliques d'une fonction affine ?
4. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2-x-5}{x+1}$ admet une asymptote oblique dont on déterminera l'équation

**Exercice 8.** On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = -2\frac{xe^x-1}{e^x-1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Étudier le signe de $e^x - x$.
3. En déduire les variations de $f$.
4. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition.
5. Montrer que la courbe de $f$ admet trois asymptotes dont on déterminera les équations.
6. Étudier les positions relatives de la courbe et de l'asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$.
7. Tracer le graphe de $f$.

**Exercice 9.**
1. Montrer que l'équation $x^5 = x^2 + 2$ a au moins une solution sur $]0,2[$.
2. Montrer que le polynôme $x^3 + 2x - 1$ a une unique racine qui appartient à l'intervalle $]0,1[$.
3. Montrer que l'équation $x^2(\cos x)^5 + x\sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution réelle.

### Résultats théoriques (fonctions abstraites)

**Exercice 10** (Démo du TVI par dichotomie)**.** Soient $a < b$ deux réels et $f$ continue sur $[a;b]$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On construit deux suites avec : $a_0 = a, b_0 = b$ et le phénomène suivant : on construit $m = \frac{a_n+b_n}{2}$. Si $f(m) < 0$, on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$. Si $f(m) \geqslant 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) \geqslant 0$
2. Montrer que $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes
3. Conclure.
4. Pour $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur $[1;2]$, adapter en un script Python donnant une valeur approchée de $\sqrt{2}$

**Exercice 11** (Max de fonctions continues)**.** Montrer par récurrence que si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions continues, alors $\max(f_1, \dots, f_n)$ est une fonction continue.

♠ **Exercice 12** (Caractérisation séquentielle de la limite)**.** *Hors programme, mais instructif, pour manipuler les définitions.* En raisonnant par l'absurde, démontrer que si pour toute suite $(x_n)$ vérifiant $x_n \to x$, $(f(x_n)) \to f(x)$, alors $f$ est continue en $x$

♢ ♡ **Exercice 13.** Soient $a < b$ deux réels et $f : [a;b] \to [a;b]$ une fonction continue. Montrer que $f$ admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a,b]$ vérifiant $f(x) = x$

**Exercice 14.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$. Montrer que $f$ est constante.

**Exercice 15.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

♢ **Exercice 16.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant des limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 17.** Montrer qu'une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ est constante.

♠ **Exercice 18** (Équation différentielle et unicité de la limite)**.** Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f = 2f'$. On suppose que $f$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$

1. Montrer que $f'$ a une limite en $+\infty$
2. Montrer que si $f$ et $f'$ ont une limite en $+\infty$ alors $f'$ tend vers 0
3. En déduire la limite de $f$ en $+\infty$