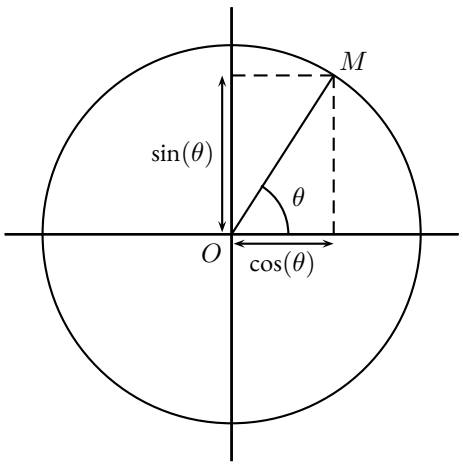
Devoir Maison n°5 : Trigonométrie

Le polycopié du chapitre de trigonométrie sera un catalogue des formules et propriétés à connaître, sans démonstration (on les fait ici !). **Les parties I.3. et II.3. sont à rédiger. Le reste ne sera pas relevé**, mais est tout de même à faire. Le devoir sera partiellement corrigé en classe, je vous invite à le travailler sérieusement pour tirer parti de la correction. C'est à la fois l'occasion de travailler ces formules (exigibles), et de retravailler un certain nombre de notions, d'analyse notamment.

I. Premières fonctions trigonométriques : Sinus et Cosinus

1. Rappels utiles



Sinus et cosinus : Dans un repère orthonormé, on s'intéresse au cercle $\mathcal{C}$ centré en $(0,0)$ et de rayon 1 appelé **cercle trigonométrique**. Pour $M \in \mathcal{C}$ formant un angle θ avec l'axe des abscisses ($\theta \in \mathbb{R}$), on appelle $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ l'abscisse et l'ordonnée de M. Ainsi, les coordonnées de M sont $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.
L'angle θ est ici exprimé en **radian**, c'est-à-dire qu'un tour complet du cercle correspond à un angle de 2π

Produit scalaire : Pour deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ formant un angle θ, et de coordonnées respectives (x, y) et (x', y')

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta) = xx' + yy'$$

Norme : On rappelle que la norme d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) est la quantité

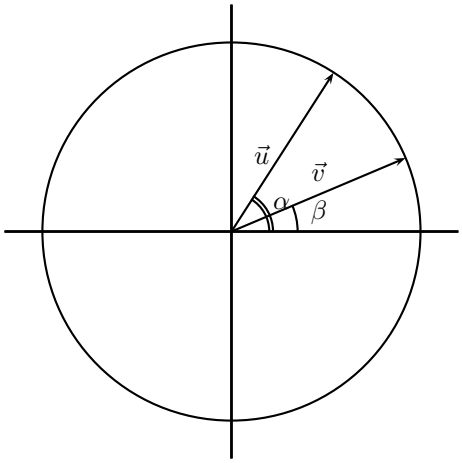
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. Premières propriétés, lien entre sinus et cosinus

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$
2. Justifier :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$
3. Graphiquement, représenter sur un cercle trigonométrique et interpréter les propriétés suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + \pi) = -\cos(x)$
   (d) $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + \pi) = -\sin(x)$
   (e) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi - x) = -\cos(x)$
   (f) $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi - x) = \sin(x)$
   (g) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
4. En déduire pour tout x réel :
   (a) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
   (b) $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$
   (c) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$
5. Résoudre l'équation : $\cos(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

- La fonction **cosinus** est **paire**, la fonction **sinus** est **impaire**
- Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-**périodiques**
- On retiendra l'interprétation géométrique de ces formules

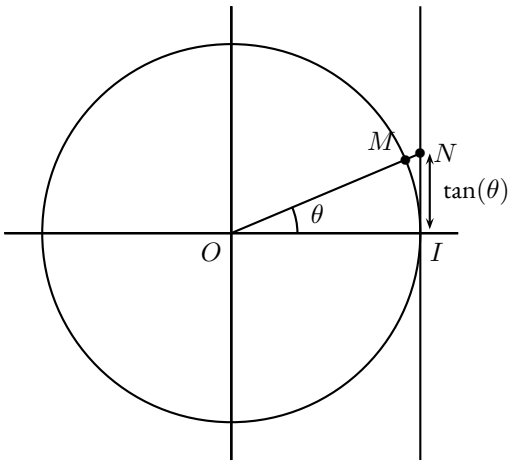
3. Formules d'addition et de multiplication



1. On considère des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de norme 1 formant des angles respectifs α et β avec l'axe des abscisses. Montrer que
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
2. En déduire :
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
3. En utilisant les propriétés de la section précédente, montrer :
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$$
4. (a) En utilisant les questions précédentes, montrer :
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$
(b) Proposer des formules similaires pour $\cos(\alpha)\sin(\beta)$, $\sin(\alpha)\cos(\beta)$ et $\sin(\alpha)\sin(\beta)$

II. Tangente, arctangente

1. Définition



On note E l'ensemble $\{\frac{\pi}{2} + n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash E$ on appelle **tangente** de x la quantité
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$\mathbb{R}\backslash E$ est l'ensemble de définition de la fonction tangente.

Graphiquement, la tangente de θ correspond à l'ordonnée du point N d'abscisse 1 tel que $\widehat{ION} = \theta$ (on continue la droite (OM) jusqu'à croiser la droite d'équation $x = 1$). Si $\theta \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$, les points M, O, N sont alignés dans cet ordre.

1. En considérant les triangles OMI et ONI, ainsi que la portion de disque définie par O, M et I, justifier
$$\forall \theta \in [0; \frac{\pi}{2}[, \sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta)$$
2. En déduire
$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[, \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$
et finalement la limite à droite en 0 de $\dfrac{\sin(x)}{x}$. Comment adapter pour déterminer la limite à gauche ?

Dans la suite, les limites usuelles du chapitre 6 seront admises.

2. Une dernière formule d'addition

Montrer que pour tous α, β vérifiant $\tan(\alpha)$, $\tan(\beta)$ et $\tan(\alpha + \beta)$ bien définis,
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

3. Dérivation

1. En utilisant les formules d'addition et de soustraction de **sin** et **cos**, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos(x) \quad \text{et} \quad \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -\sin(x)$$

2. En déduire que les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donner leurs fonctions dérivées
3. Montrer que tan est dérivable sur son ensemble de définition et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash E$,

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

4. Que dire de la périodicité de tan ? Est-ce une fonction injective sur $\mathbb{R}\backslash E$?
5. En déduire le tableau de variation de la fonction tangente (sur chaque intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash E$!)
6. Montrer que la restriction de tan : $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est bijective de bijection réciproque strictement croissante
7. On appelle cette bijection réciproque **arctangente** notée arctan. Tracer le tableau de variation de cette fonction, en déterminant ses limites éventuelles.

   Remarque : on déterminera la valeur de la dérivée de arctan dans notre chapitre de dérivation

8. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\tan(\arctan(x)) = x$? $\arctan(\tan(x)) = x$?

III. Applications

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos^2(x) - 1$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$
3. **Plus difficile.** Soit $k \in \mathbb{N}$. En calculant $\tan(\arctan(k+1) - \arctan(k))$, simplifier $\arctan(k+1) - \arctan(k)$.
   En déduire la limite de la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$