Feuilles d'exercices n°6

Exercice 4 (Démonstrations : croissances comparées)**.** Soit g la fonction (dérivable) définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g(x) \geq 0$
   g est dérivable et pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

On en déduit : $g'(x) \geq 0 \iff \sqrt{x} - 2 \geq 0 \iff x \geq 4$, d'où le tableau de variations :

x	0		4		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$2\left(1 - \ln(2)\right)$	$\nearrow$	

On en déduit que g atteint un minimum en 4, de valeur $g(4) = 2(1 - \ln(2))$ et, puisque $\ln(2) < 1$, $g(4)$ est positif et donc g est positive sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On déduit de la question précédente :

$$g(x) = \sqrt{x} - \ln(x) \geq 0$$

d'où : $\ln(x) \leq \sqrt{(x)}$ et en divisant par x qui est strictement positif : $\frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

3. Conclure sur la limite à l'infini de $\frac{\ln(x)}{x}$
   Pour $x > 1$, on a donc :

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Puisque $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, par **théorème des gendarmes**, $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

4. En posant $u = \frac{1}{x}$, montrer $x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$
   C'est toujours une bonne astuce pour transporter les problèmes de 0 en $+\infty$ et inversement.
   En posant $u = \frac{1}{x}$, où $x \to 0^+$, on obtient $u \to +\infty$ et :

$$x \ln(x) = \frac{1}{u} \ln\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{-\ln(u)}{u}$$

D'après la question précédente, puisque $u \to +\infty$, $\frac{-\ln(u)}{u} \to -0 = 0$ et donc $x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

5. En posant $u = e^x$, montrer $\frac{x}{e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
   De même, posons $u = e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Alors,

$$\frac{x}{e^x} = \frac{\ln(u)}{u} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0$$

d'où le résultat escompté.

Exercice 8. On considère la fonction f définie par $f(x) = -2\frac{xe^x - 1}{e^x - 1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
   Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ sont définies sur $\mathbb{R}$. f est donc définie dès que $e^x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire dès que $x \neq 0$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R}^*$

2. Étudier le signe de $e^x - x$.
La fonction $g : x \mapsto e^x - x$ est dérivable, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x - 1$. g' est donc positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Ainsi, g est positive : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x \geq 0$
Remarque : on a même montré $g \geq 1$, mais ce n'est pas demandé.

3. En déduire les variations de f.
f est dérivable sur son ensemble de dérivation car obtenue par opérations élémentaires à partir de fonctions de référence dérivables et pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\frac{(e^x + xe^x)(e^x - 1) - e^x(xe^x - 1)}{(e^x - 1)^2} \\ &= -2\frac{e^{2x} + xe^{2x} - e^x - xe^x - xe^{2x} + e^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= -2\frac{e^x(e^x - x)}{(e^x - 1)^2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ *(intervalles !)*

4. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

— En $+\infty$: $f(x) = -2\frac{xe^x-1}{e^x-1} = -2\frac{x-e^{-x}}{1-e^{-x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

— En $-\infty$: $f(x) = -2\frac{xe^x-1}{e^x-1} = -2\frac{e^{-x}(xe^x-1)}{e^{-x}(e^x-1)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ par croissance comparée

— En 0^+ et 0^- : d'une part, $-2(xe^x - 1) \xrightarrow[x\to 0]{} 2$; d'autre part, $e^x - 1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$ et $e^x - 1 \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0^-$
Ainsi, $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$.

5. Montrer que la courbe de f admet trois asymptotes dont on déterminera les équations.
Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$, f admet une asymptote d'équation $\boxed{x = 0}$. f n'admet pas d'autre asymptote verticale et admet une asymptote horizontale d'équation $\boxed{y = 0}$ en $-\infty$. f n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$, cherchons donc une asymptote oblique : pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = -2\frac{1 - e^{-x}/x}{1 - e^{-x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -2$$

De plus,

$$\begin{aligned} f(x) + 2x &= -2x\left(\frac{1 - e^{-x}/x}{1 - e^{-x}} - 1\right) \\ &= -2x\left(\frac{1 - e^{-x}/x - 1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right) \\ &= -2xe^{-x}\left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - e^{-x}}\right) \end{aligned}$$

En $+\infty$, la fraction tend vers 1 et par croissance comparée l'ensemble tend vers 0.
On en déduit que la courbe de f admet une troisième asymptote, d'équation $\boxed{y = -2x}$, en $+\infty$

6. Étudier les positions relatives de la courbe et de l'asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$.
C'est-à-dire étudier le signe de $f(x) + 2x$. Dans la question précédente, on voit que $-2xe^{-x}$ est négatif, que $1 - \frac{1}{x}$ et $1 - e^{-x}$ sont positifs au voisinage de $+\infty$, et donc que $f(x) + 2x$ est négatif, c'est-à-dire que la courbe de f est sous son asymptote en $+\infty$.
7. Tracer le graphe de f.
Faire apparaître : les trois asymptotes, le fait que la courbe soit sous son asymptote en $+\infty$, la stricte monotonie sur les deux intervalles de l'ensemble de définition.

Exercice 9. 1. Montrer que l'équation $x^5 = x^2 + 2$ a au moins une solution sur $]0, 2[$.
Réécrivons cette équation : $x^5 - x^2 - 2 = 0$. La fonction $f : x \mapsto x^5 - x^2 - 2$ est continue sur $[0; 2]$ et vérifie $f(0) = -2 < 0$, $f(2) = 26 > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]0; 2[$

2. Montrer que le polynôme $x^3 + 2x - 1$ a une unique racine qui appartient à l'intervalle $]0, 1[$.
Notons g ce polynôme, dérivable car polynômial sur $[0; 1]$ avec, pour tout $x \in [0; 1], g'(x) = 2x^3 + 2 > 2$. On a montré que g' était strictement positive, et donc que g est strictement croissante. De plus, $g(0) = -1$ et $g(1) = 2$. Ces deux images sont de signe opposé, et g est continue. Ainsi, d'après le théorème de la bijection *(par exemple)*, g admet une unique racine dans $]0; 1[$.
3. Montrer que l'équation $x^2(\cos x)^5 + x \sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution réelle.
Comme produit et composée de fonctions continues, la fonction $h : x \mapsto x^2(\cos(x))^5 + x\sin(x) + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $h(0) = 1$ et $h(\frac{-3\pi}{2}) = 0 + (-\frac{3\pi}{2} \times 1) + 1 = 1 - \frac{3\pi}{2} < 0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.

Exercice 10 (Démo du TVI par dichotomie)**.** Soient $a < b$ deux réels et f continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On construit deux suites avec : $a_0 = a, b_0 = b$ et le phénomène suivant : on construit $m = \frac{a_n + b_n}{2}$. Si $f(m) < 0$, on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$. Si $f(m) \geq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) \geq 0$
Par récurrence.
   — Initialisation : pour $n = 0$, $a_0 = a$ et $b_0 = b$ vérifient cette propriété par hypothèse.
   — Hérédité : soit n tel que $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) \geq 0$. Alors, avec le m défini dans l'algorithme, si $f(m) < 0$, $a_{n+1} = m$ donc $f(a_{n+1}) = f(m) < 0$ et $f(b_{n+1}) = f(b_n) \geq 0$ par hypothèse de récurrence. De même, si $f(m) \geq 0$, alors $f(a_{n+1}) = f(a_n) < 0$ par hypothèse de récurrence et $f(b_{n+1}) = f(m) \geq 0$. La récurrence est donc établie.
   — Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) \geq 0$
2. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes
On montre également par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n$. On en conclut par disjonction de cas : soit $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} \leq b_n$, soit $a_{n+1} \geq a_n$ et $b_{n+1} = b_n$. Dans les deux cas, $a_{n+1} \geq a_n$ et $b_{n+1} \leq b_n$, ce qui montre que (a_n) **est croissante et** (b_n) **décroissante.** De plus, à chaque étape, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$, ce qui permet de montrer par récurrence : $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ et donc $b_n - a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Ainsi, $\boxed{(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont adjacentes.}}$
3. Conclure.
Puisque (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ. Par continuité de f, $f(a_n) \to f(\ell)$ et $f(b_n) \to f(\ell)$. De plus, d'après les questions précédentes, $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) \geq 0$: à la limite $f(\ell) \leq 0$ et $f(\ell) \geq 0$, ce qui montre $\boxed{f(\ell) = 0}$
4. Pour $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur $[1; 2]$, adapter en un script Python donnant une valeur approchée de $\sqrt{2}$
En l'absence de consignes, écrivons par exemple un script qui approche $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

```
eps = 10**(-5)
def f(x):
    return x**2 - 2
a = 1
b = 2
while b-a > eps:
```

```
    m = (a+b)/2
    if f(m) < 0:
        a = m
    else:
        b = m
print(a,b)
```

Ici, le programme exécuté dans Python (faites-le chez vous quand vous écrivez un code ! enfin un domaine des maths où on n'a pas besoin de demander à la prof si la réponse est juste !!!) affiche :

`1.4142074584960938 1.414215087890625`

Exercice 11 (Max de fonctions continues). Par récurrence.
Initialisation : Pour $n = 1$ et f_1 fonction continue sur un intervalle I, alors $\max(f_1) = f_1$ est continue par hypothèse.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour toutes fonctions $\{f_i \in \mathcal{C}^0(I) | 1 \leq i \leq n\}$, $\max(f_1, \dots, f_n)$ soit continue.
Soient $f_1, \dots, f_{n+1}$ des fonctions continues sur I. Montrons que $\max(f_1, \dots, f_n, f_{n+1})$ l'est.
Or, $\max(f_1, \dots, f_{n+1}) = \max(\max(f_1, \dots, f_n), f_{n+1})$ (comprendre ce que ça veut dire)
Par hypothèse de récurrence, $\max(f_1, \dots, f_n)$ est continue, et par hypothèse f_{n+1} est continue. De plus, d'après la propriété du cours, le max de deux fonctions continues est une fonction continue. Ainsi, $\max(f_1, \dots, f_{n+1})$ est continue et la récurrence est établie.

Exercice 12 (Caractérisation séquentielle de la limite). En raisonnant par l'absurde, démontrer que si pour toute suite (x_n) vérifiant $x_n \to x$, $(f(x_n)) \to f(x)$, alors f est continue en x
Supposons par l'absurde que f ne soit pas continue en x_0, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \alpha > 0; \exists x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[, |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$ (faire un dessin !)
Prenons par exemple $\alpha = \frac{1}{n}$. L'hypothèse précédente permet de construire x_n vérifiant $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$.
Ceci étant possible pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous disposons ainsi d'une suite (x_n).
Par construction,

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$$

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer $x_n \to x_0$ et par hypothèse sur f, $f(x_n) \to f(x_0)$. Or, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$, en passant à la limite :

$$f(x_0) \geqslant f(x_0) + \varepsilon \text{ ou } f(x_0) \leqslant f(x_0) - \varepsilon$$

Ceci est une contradiction car ε est strictement positif.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.
Inspirons-nous de l'exercice 17. Nous allons montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par hypothèse sur f, $f(\frac{x}{2}) = f(x)$. De même, $f(\frac{x}{4}) = \frac{x}{2} = f(x)$. Par récurrence immédiate, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(\frac{x}{2^n}) = f(x)$.
Puisque $\frac{x}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et que f est continue en 0, $f(\frac{x}{2^n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(0)$. Par unicité de la limite, on obtient donc :

$$f(x) = f(0)$$

Ainsi, f est constante.

Exercice 18 (Équation différentielle et unicité de la limite). Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f = 2f'$. On suppose que f a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$

1. Montrer que f' a une limite en $+\infty$
   Évident car $f' = \frac{1}{2}f$
2. Montrer que si f et f' ont une limite en $+\infty$ alors f' tend vers 0
   Si par l'absurde f' tend vers $\ell \neq 0$, montrons que f n'a pas de limite. Notons ℓ la limite de f'.

— Si $\ell > 0$, au bout d'un certain x_0, $f' \geq \frac{\ell}{2}$ (ou 1 si $\ell = +\infty$) et en intégrant : pour tout $x \geq x_0$,

$$f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0) \times \frac{\ell}{2}$$

donc $f(x) \to +\infty$ par comparaison

— Si $\ell < 0$, au bout d'un certain x_0, $f' \leq \frac{\ell}{2}$ (ou -1 si $\ell = -\infty$) et en intégrant : pour tout $x \geq x_0$,

$$f(x) \leq f(x_0) + (x - x_0) \times \frac{\ell}{2}$$

donc $f(x) \to -\infty$ par comparaison

3. En déduire la limite de f en $+\infty$

   On déduit de la question précédente que f' tend vers 0, et puisque $f = 2f'$, f tend vers 0

Remarque : en fait, une telle fonction n'existe pas, car les solutions de $f = 2f'$ sont de la forme $f(x) = Ae^{\frac{x}{2}}$ et n'ont pas de limite finie, mais le même raisonnement est valable pour $f = -2f'$, et là les solutions de la forme $f(x) = Ae^{-\frac{x}{2}}$ avec $A \in \mathbb{R}$ ont bien 0 pour limite.