Algèbre 1

CHAPITRE 7 : SYSTÈMES LINÉAIRES

I. INTRODUCTION

On s'intéresse ici à des systèmes **linéaires** (plusieurs équations, plusieurs inconnues). Par exemple, retrouver deux nombres en connaissant leur somme et leur différence peut être modélisé par un système linéaire. Plus généralement, on s'intéresse à tout système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = \lambda_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n & = \lambda_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = \lambda_m \end{cases}$$

Ici, il y a n inconnues $(x_1, \ldots, x_n)$ et m équations.

Remarque. On peut réécrire ce système :

$$\forall i \in [|1;m|], \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda_i$$

Définition 1 (Vocabulaire).
- On appelle **coefficients** les réels $(a_{ij})_{(i,j)\in[|1;m|]\times[|1;n|]}$
- On dit que le système est **homogène** si $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$
- Une **solution** est un $n-$**uplet** $(x_1, \ldots, x_n)$ solution de chacune des équations

Exemples (Non-exemples). Les systèmes ci-dessous ne sont pas linéaires :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} & = 1 \\ x - 2\sqrt{y} & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by & = 1 \\ x^2 + y^2 & = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y & = 0 \\ (3+x)y & = 1 \end{cases}$$

II. CAS PARTICULIER : DEUX ÉQUATIONS, DEUX INCONNUES

On se place ici dans le cas particulier « deux équations, deux inconnues » pour se re-familiariser avec ces systèmes avant de parler d'un cas plus général. On étudie le système :

$$\begin{cases} ax + by & = \lambda \quad (L1) \\ a'x + b'y & = \mu \quad (L2) \end{cases}$$

1. Résolution

Exemple. Prenons le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y & = -1 \quad (L1) \\ x - 4y & = 0 \quad (L2) \end{cases}$$

Deux méthodes usuelles :
- La méthode dite **par substitution** :

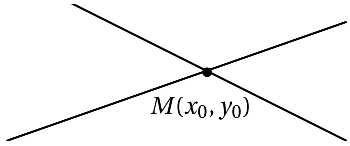
- La méthode dite **par combinaison linéaire** :

♡

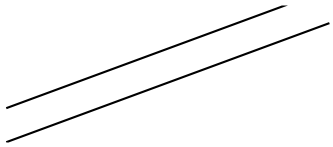
2. Vision graphique

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues revient à chercher les coordonnées des points d'intersection de deux droites données par leurs équations cartésiennes. Trois cas sont possibles :

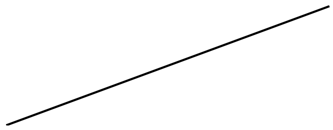
- Un seul point d'intersection (droites sécantes) : Le système a alors une unique solution : le couple (x_0, y_0) des coordonnées du point d'intersection.



- Aucun point d'intersection (droites parallèles) : Le système n'a pas de solution



- Une infinité de points d'intersection (droites confondues) : Le système a alors une infinité de solutions : tous les couples de coordonnées des points des droites.



On verra que cette disjonction de cas se généralise à tout nombre d'équations. On peut aussi formuler une **condition nécessaire et suffisante** :

Propriété 2. Le système a une unique solution si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$

C'est le déterminant des vecteurs directeurs $(-b; a)$ *et* $(-b'; a')$

III. Cas général : la méthode du Pivot de Gauss

1. Nombre de solutions, systèmes de Cramer

Propriété 3. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est solution d'un système homogène, alors pour tout $t \in \mathbb{R}, (tx_1, \dots, tx_n)$ est solution du même système. Si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont solutions d'un système linéaire, alors $(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$ est solution du système linéaire homogène associé.

Démonstration.

Exercice. On considère un système à 5 inconnues dont $(-1; 0; -1; 0; -1)$ et $(0; 0; 0; 1; 1)$ sont des solutions. En déduire plusieurs autres solutions, puis tout un ensemble paramétré.

Théorème 4. Soit (S) un système d'équations. Alors, il existe trois possibilités

- (S) n'a pas de solutions
- (S) a une unique solution
- (S) a une infinité de solutions.

C'est-à-dire : si il existe deux solutions distinctes, alors il en existe une infinité.

♡ *Démonstration.*

Propriété 5. Si le système (S) est homogène, alors il a une unique solution ou une infinité de solutions.

Définition 6. Un système ayant une unique solution est dit **de Cramer.** Dans ce cas, on a nécessairement $m \geqslant n$ (admis).

2. Opérations élémentaires

Définition 7. On définit les deux opérations suivantes, qui permettent de définir un nouveau système équivalent au premier :

- **Échange de deux lignes** : pour tous $i, j \leqslant m$, on note $L_i \leftrightarrow L_j$ l'opération qui échange les lignes i et j
- **Combinaison linéaire** : pour $i \neq j$ et $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, on note $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ le fait d'écrire à la place de la ligne i la combinaison linéaire des lignes i et j (cas particuliers : $b = 0$ ou $a = 1$)

Exemple. Dans toute cette section, on s'intéresse au système :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & y & - & 5z & = & 6 & (L1) \\ -3x & + & 2y & + & z & = & -13 & (L2) \\ x & - & y & - & 2z & = & 7 & (L3) \end{array} \right.$$

Exemple. Reprenons notre système et appliquons :

- $L_1 \leftrightarrow L_3$:

- $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$:

- $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$:

- $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$:

Remarque. Ces systèmes sont équivalents, au sens où les solutions d'un système (S') obtenu par opérations élémentaires à partir de (S) sont les mêmes que celles de (S). C'est lié au fait qu'on peut inverser les opérations.
En effet, l'inverse de $L_i \leftrightarrow L_j$ est : ....
et l'inverse de $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ est : ....

Définition 8 (Système échelonné)**.** On appelle système échelonné un système dans lequel chaque ligne contient au moins une inconnue de moins que la ligne précédente (coefficients égaux à 0), c'est-à-dire qu'il a une forme :

Le premier coefficient non nul de chaque ligne s'appelle **pivot**, l'inconnue associée est qualifiée de **principale** et les inconnues qui ne sont pas principales sont dites **auxiliaires**

Remarque. Cette forme de systèmes est particulièrement intéressante parce qu'elle permet de résoudre de proche en proche en « remontant » le système.

Exemple. Reprendre l'exemple précédent et appliquer :

1. $L_3 \leftarrow -\frac{1}{16}L_3$
2. $L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3$
3. $L_2 \leftarrow -L_2$
4. $L_2 \leftarrow L_1 + 2L_3$
5. $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

♡ *Exercice.* Mettre sous une forme échelonnée puis résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \end{array}\right.$$

3. Écriture paramétrique des solutions

On se place ici dans le cas où le système étudié admet une infinité de solutions.

Exemple. On considère le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -3x & - & 4y & - & 4z & = & 1 \end{array}\right.$$

♡ *Exercice.* Par des opérations élémentaires, montrer que ce système est équivalent au système échelonné ci-dessous. Quelles inconnues sont principales et quelles inconnues sont auxiliaires ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ & & 5y & + & 2z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Finalement, écrire l'ensemble des solutions en fonction du **paramètre** z.