Devoir Maison n°6

Suite récurrente - issu de Edhec 2016

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$. On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. (a) Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.
   (b) Vérifier que la suite (u_n) est définie et strictevement positive.
2. Les programmes suivants en Python renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5 et pour celui de droite la valeur 6. Que sait-on alors de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite (u_n) ?

```
import math as m
u = 1
n = 0
while u > 0.00001:
    u = m.exp(-u)/u
    n = n+1
print(n)
```

```
import math as m
u = 1
n = 0
while u < 100000:
    u = m.exp(-u)/u
    n = n+1
print(n)
```

3. (a) Étudier les variations de la fonction g définie sur R_+ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = e^{-x} - x^2$
   (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une unique solution α sur $\mathbb{R}_+^*$
   (c) Montrer que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$
4. (a) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$
   (b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
5. On pose $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$
   (a) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0
   (b) Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$
   (c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
   (d) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$