Devoir Maison n°7 - Matrices stochastiques

Soit n un entier et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est **stochastique** si :

- $\forall (i,j) \in [|1,n|]^2, m_{ij} \geqslant 0$
- $\forall i \in [|1,n|], \sum\limits_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$

1. Justifier que $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice stochastique.
2. Donner un exemple de matrice stochastique à coefficients non entiers, et un exemple de matrice non stochastique.
3. En utilisant la formule du produit matriciel, montrer que si A, B sont deux matrices stochastiques, alors AB est stochastique.
4. Montrer que si A est stochastique, alors pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, A^p est stochastique.
5. Montrons que si A est stochastique **et inversible** et que A^{-1} est stochastique, alors A ne contient que des 0 et des 1. Notons (a_{ij}) les coefficients de A et (b_{ij}) les coefficients de A^{-1}
   (a) Soit $(i,j) \in [|1;n|]^2$ avec $i \neq j$. Justifier :
   $$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = 0$$
   (b) En déduire que pour tout $k \in [|1;n|]$, $b_{ik}a_{kj} = 0$ puis que pour tout $(i,k) \in [|1;n|]^2$ tels que $b_{ik} \neq 0$, alors pour tout $j \neq i$, $a_{kj} = 0$
   (c) On rappelle qu'une matrice inversible n'a pas de colonne nulle. Soit $k \in [|1;n|]$. Justifier qu'il existe un $i \in [|1;n|]$ tel que $b_{ik} \neq 0$.
   (d) Montrer que pour chaque ligne de A contient un seul coefficient non nul.
   (e) Conclure.
6. La réciproque est-elle vraie ?
7. Posons $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.Montrer que si M est stochastique alors $MX_0 = X_0$.
8. Soit $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ et λ un réel tels que $MX = \lambda X$. Montrons que $|\lambda| \leqslant 1$.
   (a) Posons i_0 un entier entre 1 et n tel que $|X_{i_0}|$ soit maximal. Justifier que i_0 existe et que $|X_{i_0}| \neq 0$.
   (b) Montrer : $\sum\limits_{k=1}^{n} M_{i_0,k} X_k = \lambda X_{i_0}$
   (c) Montrer : $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} M_{i_0,k} X_k \right| \leqslant |X_{i_0}|$
   (d) Conclure.