Devoir surveillé n°du 16 novembre

Calculatrice interdite. Tous les résultats doivent être soigneusement justifiés, que l'énoncé le précise ou non. La présentation et la rédaction sont centrales dans l'appréciation d'une copie.

Check-list avant de rendre la copie :

- ☐ Copie tenue bras tendu : on voit les changements d'exercices et de questions.
  Pour ce faire, sauter une ligne entre les questions, encadrer les noms des exercices.
- ☐ Copie tenue bras tendu : copie aérée et lisible.
  Mettre une marge si il n'y en a pas sur la feuille, sauter des lignes si besoin, soigner la calligraphie (si besoin, écrire plus gros, sur les lignes, changer de stylo), éviter les longs paragraphes : aller à l'argument principal.
- ☐ Pages numérotées et rangées dans l'ordre.
- ☐ Exercices et questions numérotées.
- ☐ Résultats encadrés.
  À la règle, et sans surligneur.
- ☐ Phrases réponses, noms de théorèmes soulignés.
- ☐ Pas ou peu de ratures.
  Si c'est le cas, barrer proprement la question concernée, la séparer du reste du texte par deux lignes horizontales et recommencer proprement. Penser à utiliser un brouillon pour les calculs !
- ☐ Variables introduites par "soit" (quand c'est nécessaire).
  Par exemple, f ou (u_n) sont en général des variables introduites dans l'énoncé alors que x, n ne le sont pas. Les variables muettes utilisées dans une phrase quantifiée, les variables de sommation, n'ont pas besoin d'être introduites par "soit".
- ☐ Syntaxe et orthographe correctes.
  Faire en particulier attention aux mots "mathématiques" (noms de mathématiciens dans les théorèmes, termes techniques comme "asymptote", "dérivabilité"...)
- ☐ Modes de raisonnements / étapes indiquées.
  On ne ré-écrit pas l'énoncé, mais on précise "montrons maintenant que (...)", "étudions la limite de (...)" et "raisonnons par analyse-synthèse/l'absurde/récurrence/double implication..."

Exercice 1 - Questions introductives

Toutes les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

(a) $\begin{cases} 2x + y - 5z = 1 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - 3y + z = 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5x - 3y = \lambda x \\ 6x - 4y = \lambda y \end{cases}$

2. Que fait la fonction Python suivante ?

```python
def fonction_mystere(l):
    a = l[0]
    b = l[0]
    n = len(l)
    for k in range(n):
        if l[k] < a :
            a = l[k]
        if l[k] > b :
            b = l[k]
    return a,b
```

3. **Vrai/Faux.** Soit (u_n) une suite.
   (a) Si u_n converge, alors $|u_n|$ converge
   (b) Si $|u_n|$ converge, alors u_n converge.
   (c) Si u_n converge, alors $\lfloor u_n \rfloor$ converge
   (d) Si $\lfloor u_n \rfloor$ converge, alors u_n converge

Exercice 2 - Une suite récurrente

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 10 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n)$$

On donne les valeurs approchées : $e \approx 2,7$ et $f(10) \approx 4,3$.

Partie I - Étude de f

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, noté D_f ainsi que les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes de la courbe C_f (horizontales, verticales, obliques).
2. Écrire une fonction Python `f` qui prend en argument un réel x et qui renvoie la valeur de $f(x)$.
3. Voici un programme écrit en Python :

```python
def mystere(M):
    x=3
    while f(x)<M:
        x=x+1
    return x
```

   Que renvoie l'appel `mystere(2)` ?
   L'appel `mystere(1000)` renvoie `9119`. Interpréter cette valeur.
4. Dresser le tableau de variations complet de f sur son ensemble de définition.
5. Étudier la position relative de C_f par rapport à la droite d'équation $y = x$.
6. Représenter l'allure de C_f . On fera apparaître les éventuelles asymptotes à C_f.

Partie II - Étude de (u_n)

1. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie, décroissante et minorée par e.
2. Montrer : $\forall x \in [e, +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{2}{\ln(x)}\right)^2$.
3. En déduire : $\forall x \in [e, +\infty[,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - e| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - e|$.
   Remarque : c'est un résultat dont le lien avec la question précédente sera étudié plus tard dans l'année.
   En déduire, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $|u_n - e| \leqslant \dfrac{10}{4^n}$
5. En déduire la limite de la suite (u_n).

Problème - développement en série de l'exponentielle

Dans tout l'exercice, on prendra pour convention : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^0 = 1$.
L'objectif de l'exercice est d'établir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Partie I - Programme Python.

1. Recopier et compléter le script Python suivant de sorte que, si $k \in \mathbb{N}$, alors l'exécution de `factorielle(k)` renvoie la valeur de $k!$.

```
def factorielle(k):
    res= ....
    for i in range(.....):
        res = .......
    return res
```

2. Écrire une fonction Python qui prend en argument un réel x et un entier n et qui renvoie en sortie la liste composée des réels : $\dfrac{x^0}{0!}, \dfrac{x^1}{1!}, \dfrac{x^2}{2!}, ..., \dfrac{x^n}{n!}$.
3. En déduire une fonction Python qui prend en argument un réel x et un entier n et qui renvoie la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
4. Recopier et compléter le programme Python suivant de sorte que, si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, alors l'exécution de `CB_somme(x,k)` renvoie la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$.

```
def CB_somme(x,n):
    facto= ....
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        facto = k*facto
        S = .....
    return S
```

5. Entre les programmes des questions 3 et 4, lequel préférer ? Justifier votre réponse.

1. Partie II - Une croissance comparée.

L'objectif de cette partie est de démontrer le résultat suivant, utile en **Partie III** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{x^n}{n!}$. Posons également $n_0 = \lfloor 2\,|x|\rfloor$.

1. Rappeler l'encadrement liant x et $\lfloor x \rfloor$.
2. Démontrer : $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ |u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n|$.
3. En déduire : $\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-n_0}}|u_{n_0}|$.
4. Montrer que si $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
5. Conclure.

2. Partie III - Démonstration.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n et g_n les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ et } g_n(x) = f_n(x) + \frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

1. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0)$ et $g_n(0)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que les fonctions f_n et g_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \text{ et } g_n'(x) = \frac{n-2x}{n!}x^{n-1}e^{-x}$$

3. **Cas $x \geqslant 0$.**
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente les tableaux de variations des fonctions f_n et g_n sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Soient $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geqslant 2x$. Démontrer que :

$$f_n(x) \leqslant 1 \leqslant g_n(x)$$

   En déduire :

$$0 \leqslant e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{x^n}{n!}$$

   (c) Conclure.
4. **Cas $x < 0$.**
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner les tableaux de variations des fonctions f_{2n} et f_{2n+1} sur $\mathbb{R}_-^*$.
   (b) Soient $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$f_{2n+1}(x) \leqslant 1 \leqslant f_{2n}(x)$$

   En déduire :

$$0 \leqslant e^x - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \leqslant -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ et } \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leqslant e^x - \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} \leqslant 0$$

   (c) Soit x un réel négatif. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f_n(x)$. Déduire de la question précédente que, pour tout $x < 0$, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers 1.
   (d) Conclure.