Le corrigé suivant a pour vocation de donner le barême (approximatif) du devoir (104 points en tout) et de donner les clés de réponse de chaque question. Il peut cependant contenir des erreurs, et la rédaction n'est pas irréprochable. Gardez votre esprit critique, et n'hésitez pas à me signaler des erreurs, oublis ou autres aberrations.

Exercice 1 - Questions introductives (19 pt)

Toutes les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

(a)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 5z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 4x & - & 3y & + & z & = & 5 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & 5z & = & 1 \\ 4x & - & 3y & + & z & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ & & 5y & - & 11z & = & -3 \\ & & 5y & - & 11z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ & & 5y & - & 11z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & \frac{4}{5} & + & \frac{7}{5}z \\ y & = & -\frac{3}{5} & + & \frac{11}{5}z \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est : $\left\{\left(\frac{4}{5} + \frac{7}{5}z; -\frac{3}{5} + \frac{11}{5}z; z\right) | z \in \mathbb{R}\right\}$ (3 pt)

(b)

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 5x & - & 3y & = & \lambda x \\ 6x & - & 4y & = & \lambda y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} (5-\lambda)x & - & 3y & = & 0 \\ 6x & - & (4+\lambda)y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} 6x & - & (4+\lambda)y & = & 0 \\ (5-\lambda)x & - & 3y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 6L_2 - (5-\lambda)L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} 6x & - & (4+\lambda)y & = & 0 \\ & & [(5-\lambda)(4+\lambda) - 18]y & = & 0 \end{array}\right.$$

(2 pt) Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(5-\lambda)(4+\lambda) - 18 = -(20 - 4\lambda + 5\lambda - \lambda^2) + 18 = -(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda+1)(\lambda-2)$$

On en déduit la disjonction de cas : (1 pt)

i. <u>Si $\lambda = -1$</u> : le système devient :

$$6x - 3y = 0$$

qui se résout en $y = 2x$, donc l'ensemble des solutions est $\{(x; 2x) | x \in \mathbb{R}\}$ (1 pt)

ii. <u>Si $\lambda = 2$</u> : le système devient :

$$6x - 6y = 0$$

qui se résout en $y = x$ donc l'ensemble des solutions est $\{(x; x) | x \in \mathbb{R}\}$ (1 pt)

iii. Si $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 2$ le système est équivalent à :

$$\begin{cases} 6x & - & (4+\lambda)y & = & 0 \\ & & y & = & 0 \end{cases}$$

i.e. $x = y = 0$. On en conclut qu'il existe une unique solution : $(0;0)$ (1 pt)

2. Cette fonction renvoie le minimum et le maximum de la liste `l` (2 pt)
Remarque : une façon de s'en convaincre c'est appliquer l'algorithme sur une liste particulière. Prenons par exemple `l = [-1;4;0;-3;6;2]`.

   (a) *Initialisation :* `a = -1`, `b = -1`, `n = 6`
   (b) *Boucle :*

Valeur de k	*Valeur de $l[k]$*	*$l[k] < a$?*	*Nouvelle valeur de a*	*$l[k] > b$?*	*Nouvelle valeur de b*
$k = 0$	-1	*Non*	-1	*Non*	-1
$k = 1$	4	*Non*	-1	*Oui*	4
$k = 2$	0	*Non*	-1	*Non*	4
$k = 3$	-3	*Oui*	-3	*Non*	4
$k = 4$	6	*Non*	-3	*Oui*	6
$k = 5$	2	*Non*	-3	*Non*	6

   (c) *Fin : après l'exécution de toute la boucle, on a* `a = -3` *et* `b = 6`*, la fonction renvoie* $(-3;6)$

3. (a) **Vrai** : Si (u_n) converge vers ℓ, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$: c'est une composition de limites, avec $|\cdot|$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (2 pt)
   (b) **Faux** : on peut prendre comme contre-exemple $u_n = (-1)^n$. Ici $(|u_n|)$ est une suite constante égale à 1 donc convergente, mais (u_n) ne converge bien évidemment pas. (2 pt)
   (c) **Faux** : on peut prendre par exemple $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ qui converge vers 0 mais dont la partie entière alterne entre 0 et -1 (2 pt)
   (d) **Faux** : on peut prendre par exemple une suite qui vaut alternativement $\frac{1}{2}$ et 0. La partie entière est constante égale à 0 (donc converge) mais la suite non. (2 pt)

Exercice 2 - Une suite récurrente (35 pt)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 10 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

On donne les valeurs approchées : $e \approx 2,7$ et $f(10) \approx 4,3$.

Partie I - Étude de f (25 pt)

1. $f(x)$ est défini dès lors que $\ln(x)$ est défini et non nul, c'est-à-dire : $x > 0$ et $x \neq 1$. On en déduit : $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$ (1 pt). Étudions donc f en : $0^+, 1^-, 1^+, +\infty$
   (a) En 0^+ : $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ par quotient de limites (1 pt)
   (b) En 1^+ : $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\infty$ par quotient (1 pt)
   (c) En 1^- : $f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$ par quotient (1 pt)
   (d) En $+\infty$: $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$ comme croissance comparée. (1 pt)

   On en déduit que f admet une asymptote verticale d'équation $\boxed{x = 1}$ (1 pt) et aucune asymptote horizontale. Cherchons une éventuelle asymptote oblique en $+\infty$.

D'après le cours, si $y = ax + b$ est une asymptote oblique de f en $+\infty$ (avec $a \neq 0$), alors $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} a$. Or, pour tout $x > 1$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Puisque $\frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite finie **non nulle**, f n'admet pas d'asymptote oblique. (2 pt)

2.
```python
from math import log
def f(x):
    if x > 0 and x != 1:
        return x/log(x)
    else:
        print("Erreur : la valeur donnée à f n'est pas dans son domaine de définition")
```

(3 pt)

3. Pour savoir ce que renvoie `mystere(2)`, exécutons le code avec `M = 2`. (1 pt)
`x` prend la valeur 3. Or, $f(3) = \frac{3}{\ln(3)} > 2$. Ainsi, la boucle `while` n'effectue aucune itération. L'appel `mystere(2)` renvoie 3.(1 pt) On comprend que le code affiche le premier entier n tel que $f(n) \geq M$. On en déduit que $f(n) < 1000$ pour tout $n < 9119$ et que $f(9119) \geq 1000$ (1 pt)

4. f est dérivable sur son domaine de définition (puisque ln l'est et ne s'annule pas) (1 pt), et pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{\ln(x)^2} = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$$

(1 pt) Ainsi, $f'(x) \geq 0 \iff \ln(x) - 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq 1 \iff x \geq e$ (1 pt)

x	0		1		e		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

On complète le tableau grâce à : $f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = \frac{e}{1} = e$ et grâce aux limites déterminées précédemment. (1 pt)

5. On se demande ici si C_f est au-dessus ou en-dessous de cette droite, c'est-à-dire qu'on s'intéresse au signe de $f(x) - x$. (1 pt) Pour tout $x \in D_f$,

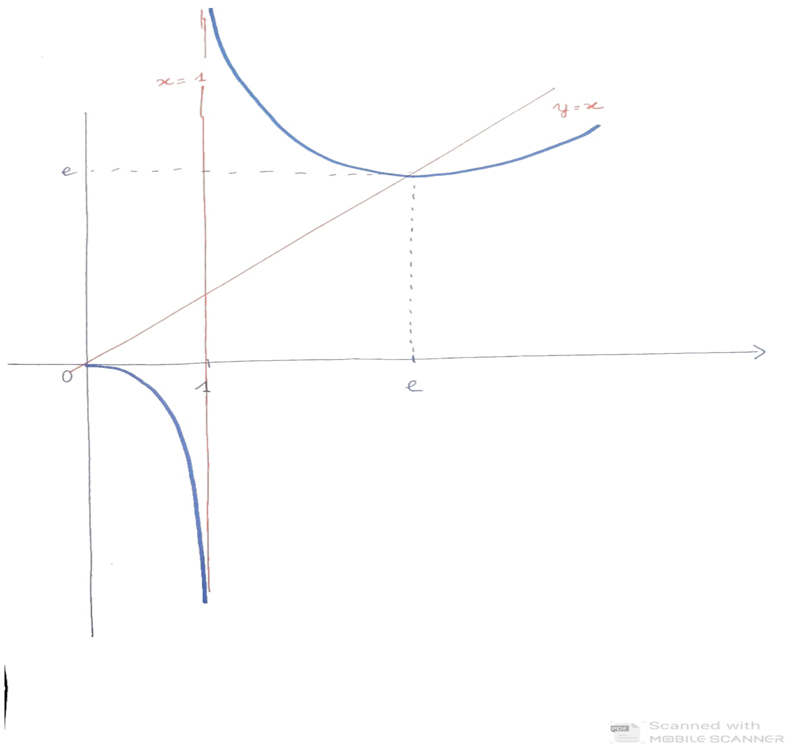
$$f(x) - x = \frac{x - x\ln(x)}{\ln(x)} = \frac{x(1 - \ln(x))}{\ln(x)}$$

Puisque $x > 0$ sur D_f, on s'intéresse au signe de $\ln(x)$ et de $1 - \ln(x)$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - \ln(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x) - x$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

(2 pt) On constate donc que C_f est sous la droite d'équation $y = x$ partout sauf entre 1 et e, et que la courbe croise la droite en e.(1 pt)

6. On trace la courbe ci-dessous :



(3 pt)

Partie II - Étude de (u_n) (13 pt)

Remarque : à ce stade, on dispose d'une courbe de f et de la droite d'équation $y = x$ sur un même graphique : tout ce dont on a besoin pour simuler (u_n) ! D'où la conjecture de la propriété qu'on montre en première question.

1. Grâce à l'étude de f précédente, montrons tout ceci par récurrence (1 pt), c'est-à-dire que l'on fait une récurrence sur la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : u_n \text{ et } u_{n+1} \text{ sont bien définis et } : e \leq u_{n+1} \leq u_n$$

   (a) Initialisation : pour $n = 0$, par hypothèse $u_0 = 10 > e$ et donc $f(u_0)$ est bien définie. On peut calculer : $u_1 = f(u_0) \simeq 4,3$ d'après l'énoncé : $\boxed{e \leq u_1 \leq u_0}$ (1 pt)

   (b) Hérédité : Soit n un entier naturel vérifiant $\mathcal{P}(n)$. En particulier, $u_{n+1} \geq e$ donc $f(u_{n+1})$ est bien défini. On peut ainsi définir u_{n+2} et par croissance de f sur $[e; +\infty[$:

$$(e \leq u_{n+1} \leq u_n) \Rightarrow (e \leq u_{n+2} \leq u_{n+1})$$

   Puisque la première propriété est vraie par hypothèse de récurrence, la seconde l'est également et la récurrence est établie. (2 pt)

   (c) Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, e \leq u_{n+1} \leq u_n$ et donc (u_n) est une suite décroissante, minorée par e

2. Soit $x \in [e; +\infty[$.
D'après une question précédente,

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4}{\ln(x)} + \frac{4}{\ln(x)^2}\right) \\
&= \frac{\ln(x)^2}{4\ln(x)^2} - \frac{1}{4} \times \frac{\ln(x)^2 - 4\ln(x) + 4}{\ln(x)^2} \\
&= \frac{\ln(x)^2 - \ln(x)^2 + 4\ln(x) - 4}{4\ln(x)^2} \\
&= \frac{4(\ln(x) - 1)}{4\ln(x)^2} \\
&= \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2} \\
&= \boxed{f'(x)}
\end{aligned}$$

(2 pt)

3. Soit $x \in [e; +\infty[$. On sait que $f'(x) \geq 0$, donc $|f'(x)| = f'(x)$ et d'après la question précédente, $f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ (1 pt)
4. (a) Initialisation : Pour $n = 0$, $|u_0 - e| = |10 - e| = 10 - e$ et d'autre part, $\frac{10}{4^0} = 10$. L'inégalité est vérifiée (1 pt)
   (b) Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - e| \leq \frac{10}{4^n}$. D'après le résultat admis :

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e| \leq \frac{1}{4} \times \frac{10}{4^n} \leq \frac{10}{4^{n+1}}$$

   La récurrence est établie. (2 pt)
   (c) Conclusion : pour tout entier naturel n, $|u_n - e| \leq \frac{10}{4^n}$
5. D'après la question précédente, pour tout entier n,

$$0 \leq |u_n - e| \leq \frac{10}{4^n}$$

Puisque $4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on en déduit par théorème des gendarmes (1 pt) que $|u_n - e| \to 0$. (1 pt)

Faisons ici une rapide preuve du fait que $|u_n - e| \to 0 \Rightarrow u_n - e \to 0$, si vous n'en êtes pas convaincu·es.
Soit (u_n) une suite vérifiant $|u_n - e| \to 0$ et un réel $\varepsilon > 0$. Puisque $|u_n - e| \to 0$, il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $||u_n - e| - 0| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $||u_n - e|| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $|u_n - e| \leq \varepsilon$. On reconnaît la définition de : $|u_n - e| \to 0$.

On peut donc conclure : $u_n - e \to 0$, ou encore : $\boxed{u_n \to e}$ (1 pt)

Une variante moins technique : on réécrit l'encadrement $|u_n - e| \leq \frac{10}{4^n}$ en :

$$-\frac{10}{4^n} \leq u_n - e \leq \frac{10}{4^n}$$

$$\textit{ie.} e - \frac{10}{4^n} \leq u_n \leq e + \frac{10}{4^n}$$

et on conclut directement par théorème des gendarmes

Problème - développement en série de l'exponentielle (50 pt)

Dans tout l'exercice, on prendra pour convention : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^0 = 1$.
L'objectif de l'exercice est d'établir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Partie I - Programme Python.(10 pt)

1.
```
def factorielle(k):
    res= 1
    for i in range(1,k+1): #attention aux bornes !
        res = res*i
    return res
```

(2 pt)

2.
```
def liste_des_valeurs(x,n):
    l = []
    for k in range(n+1):
        l.append(x**k/factorielle(k))
    return l
```

(3 pt)

3. Le plus court :

```
def somme(x,n):
    return sum(liste_des_valeurs(x,n))
```

Sans la fonction `sum` :

```
def somme(x,n):
    l = liste_des_valeurs(x,n)
    s = 0
    for k in range(len(l)):
        s = s + l[k]
    return s
```

(2 pt)

4.
```
def CB_somme(x,n):
    facto = 1
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        facto = k*facto
        S = S + x**k/facto
    return S
```

(2 pt)

5. On préférera le deuxième, puisqu'il calcule les factorielles au fur et à mesure. Le programme de la question 3, lui, calcule une factorielle à chaque itération de la boucle en repartant «du début» à chaque fois. (1 pt)

1. Partie II - Une croissance comparée.(11 pt)

L'objectif de cette partie est de démontrer le résultat suivant, utile en **Partie III** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{x^n}{n!}$. Posons également $n_0 = \lfloor 2\,|x|\,\rfloor$.

1. Par définition (1 pt) :
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

2. Soit $n \geq n_0$.
$$|u_{n+1}| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{|x|}{n+1} \times \left| \frac{x^n}{n!} \right|$$
(1 pt) Puisque $n \geq n_0 = \lfloor 2|x| \rfloor$, $n+1 > 2|x|$ et donc $\frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2}$.(1 pt)
On en conclut donc : $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|$

3. Par récurrence :
   (a) Initialisation : Pour $n = n_0$, $|u_{n_0}| \geq 0$ (toujours) et $\frac{1}{2^{n_0 - n_0}}|u_{n_0}| = \frac{1}{1}|u_{n_0}| = |u_{n_0}|$. (1 pt)
   (b) Hérédité : Soit $n \geq n_0$ tel que $0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{2^{n-n_0}}|u_{n_0}|$. Alors,
$$\begin{aligned} |u_{n+1}| &\leq \frac{1}{2}|u_n| \text{ d'après la question 2} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-n_0}}|u_{n_0}| \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &\leq \frac{1}{2 \times 2^{n-n_0}}|u_{n_0}| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1-n_0}}|u_{n_0}| \end{aligned}$$
   et la récurrence est établie. (2 pt)

   (c) Conclusion : $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{1}{2^{n-n_0}}|u_{n_0}|$

4. *C'est la même chose que l'aparté précédent (dernière question de l'exercice 2)* :
Soit $\varepsilon > 0$ et n_0 un entier tel que pour tout $n \geq n_0$, $||u_n| - 0| \leq \varepsilon$. $||u_n| - 0| = ||u_n|| = |u_n| = |u_n - 0|$. On en déduit : $\forall n \geq n_0, |u_n - 0| \leq \varepsilon$, ce qui permet de conclure : $\boxed{u_n \to 0}$ (3 pt)

5. On a montré en question 3 : $0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{2^{n-n_0}}|u_{n_0}|$. Par théorème des gendarmes (1 pt), on en déduit que $|u_n| \to 0$. D'après la question précédente (1 pt), cela implique : $\boxed{u_n \to 0}$, ce qui est le résultat annoncé.

2. Partie III - Démonstration. (29 pt)

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n et g_n les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ et } g_n(x) = f_n(x) + \frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n(0) = e^0 \sum_{k=0}^{n} \frac{0^k}{k!} = 1 \times 1 \boxed{= 1}$ puisque $0^k = 0$ dès lors que $k \geq 1$. De même, $g_n(0) = f_n(0) + \frac{0^n}{n!}e^0 = 1 + 0 \boxed{= 1}$ (2 pt)

2. Chacune des fonctions $x \mapsto \frac{x^k}{k!}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et l'exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f_n et g_n le sont comme somme et produits de fonctions dérivables. (1 pt) Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= -e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + e^{-x}\sum_{k=0}^{n} k\frac{x^{k-1}}{k!} \text{(1 pt)}\\
&= e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)\\
&= e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) \text{ en effectuant un changement d'indice (1 pt)}\\
&= \boxed{e^{-x}\times\left(-\frac{x^n}{n!}\right)} \text{ car tous les termes se simplifient sauf pour } k = n
\end{aligned}$$

(1 pt) De plus,

$$\begin{aligned}
g_n'(x) &= f_n'(x) + \frac{nx^{n-1}}{n!}e^{-x} - \frac{x^n}{n!}e^{-x}\\
&= -\frac{x^n}{n!}e^{-x} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x} - \frac{x^n}{n!}e^{-x}\\
&= e^{-x}\left(-\frac{x\times x^{n-1}}{n!} + \frac{n\times x^{n-1}}{n!} - \frac{x\times x^{n-1}}{n!}\right)\\
&= \boxed{\frac{n-2x}{n!}x^{n-1}e^{-x}}
\end{aligned}$$

(2 pt)

3. **Cas $x \geqslant 0$.**
   (a) Pour $x \geq 0$, x^n et x^{n-1} sont positifs, et e^{-x} aussi. On en déduit que $f_n'(x) \leq 0$ et que $g_n'(x) \geq 0 \iff n-2x \geq 0 \iff x \leq \frac{n}{2}$, d'où les tableaux suivants :

x	0		$+\infty$
$f_n(x)$	1	$\searrow$	0

(1 pt)La limite de f_n en $+\infty$ s'obtient par croissance comparée (1 pt) (et somme de limites)

x	0		$\frac{n}{2}$		$+\infty$
$g_n(x)$	1	$\nearrow$	$g_n\left(\frac{n}{2}\right)$	$\searrow$	0

(2 pt)

   (b) Pour $0 \leq x \leq \frac{n}{2}$, on a par décroissance (1 pt) de f_n : $f_n(0) \geq f_n(x)$ ie $f_n(x) \leq 1$ et par croissance de g_n sur $[0; \frac{n}{2}]$: $g_n(x) \geq g_n(0)$ ie $g_n(x) \geq 1$. On a bien : $\boxed{f_n(x) \leq 1 \leq g_n(x)}$, c'est-à-dire en soustrayant $f_n(x)$ à tous les membres de l'inégalité :

$$0 \leq 1 - f_n(x) \leq e^{-x}\frac{x^n}{n!}$$

(1 pt) En multipliant par e^x tous les membres de l'inégalité :

$$0 \leq e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^n}{n!}$$

(1 pt)

(c) D'après la partie II, $\frac{x^n}{n!}$ tend vers 0 donc par théorème des gendarmes (1 pt) $e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ tend vers 0 et donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x}$$

(1 pt)

4. **Cas $x < 0$.**

(a) On reprend la valeur de f_n'. Pour étudier le signe de $f_n'(x) = -e^{-x}\frac{x^n}{n!}$, faisons une disjonction de cas(1 pt) sur la parité de n. Si n est pair, alors x^n est positif, et si n est impair, x^n est négatif.(1 pt) On en déduit que f_{2n}' est négative et f_{2n+1}' positive pour tout entier n. On en déduit les tableaux :

x	$-\infty$	0
$f_{2n}'(x)$	$-$	
$f_{2n}(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1

(1 pt)

x	$-\infty$	0
$f_{2n+1}'(x)$	$+$	
$f_{2n+1}(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	1

(1 pt)

(b) L'inégalité découle directement du sens de variation des fonctions. Comme dans la partie précédente, on soustrait alors $f_{2n+1}(x)$ à tous les termes de l'inégalité et on multiplie par e^x ; on soustrait $f_{2n}(x)$ à tous les termes de l'inégalité et on multiplie par e^x. (3 pt)

(c) Il est plus simple de ne pas utiliser la deuxième partie de la question précédente : on constate que $f_{2n+1}(x) - f_{2n}(x) = e^{-x}\frac{x^{2n+1}}{n!}$ qui tend, quand n tend vers $+\infty$, vers 0 d'après la partie 1. On obtient à partir de l'inégalité de la question précédente :

$$1 + (f_{2n+1}(x) - f_{2n}(x)) \leq f_{2n+1}(x) \leq 1$$

Par théorème des gendarmes, ça permet de conclure que $f_{2n+1}(x)$ tend vers 1, c'est-à-dire : $u_n \to 1$.
De même avec :

$$1 \leq f_{2n}(x) \leq 1 + (f_{2n}(x) - f_{2n+1}(x))$$

(3 pt)

(d) Puisque (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite 1, (u_n) converge vers 1 c'est-à-dire :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x}$$

(2 pt)