Feuilles d'exercices n°8

Exercice 7 (En diagonalisant - chaîne de Markov)**.** On considère les suites (a_n), (b_n) et (c_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{1}{3}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\{ \begin{array}{rclclcl} a_{n+1} & = & a_n & + & \frac{b_n}{2} & + & \frac{c_n}{3} \\ b_{n+1} & = & \frac{b_n}{2} & + & \frac{c_n}{3} & & \\ c_{n+1} & = & \frac{c_n}{3} & & & & \end{array} \right.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qu'on déterminera.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_n}{2} + \frac{c_n}{3} \\ \frac{c_n}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

On pose donc $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2. Exprimer X_n en fonction de n, A et X_1.
Avec la même récurrence que dans les exercices vus en classe, on montre : $X_n = A^{n-1}X_1$

3. (a) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}, puis $D = P^{-1}AP$.

$P^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(b) Exprimer alors D^n, puis A^n, en fonction de n.

Puisque D est diagonale, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$ Puisque $D = P^{-1}AP$, en multipliant par P à gauche dans les deux membres de l'égalité, on obtient $PD = AP$ puis en multipliant par P^{-1} à droite : $A = PDP^{-1}$. On vérifie alors par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A = PD^nP^{-1}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Déduire des questions précédentes l'expression de b_n et c_n en fonction de n.

Connaissant $X_n = A^{n-1}X_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$,

on peut déduire :

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{et } c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

5. Montrer que la suite $(a_n + b_n + c_n)$ est constante. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2} + \frac{c_n}{3} + \frac{b_n}{2} + \frac{c_n}{3} + \frac{c_n}{3} = a_n + 2\frac{b_n}{2} + 3\frac{c_n}{3} = a_n + b_n + c_n$$

On en déduit que la suite $(a_n + b_n + c_n)$ est constante égale à $a_1 + b_1 + c_1 = 1$. Ainsi :

$$a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

6. Calculer les limites de a_n, b_n et c_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   Au vu des expressions déterminées précédemment, en reconnaissant des sommes de suites géométriques, on déduit : $a_n \to 1, b_n \to 0, c_n \to 0$

Ce genre de suites apparaît naturellement dans un cadre probabiliste.

Exercice 10. Inversibilité avec un polynôme annulateur]

Fait en classe.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

On trouve (à vérifier) $A^3 - A = 4I$ et donc : $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I) = I$ et donc A est inversible avec $A^{-1} = \frac{1}{4}\left(A^2 - I\right)$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

On trouve $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$ et donc : $A \times \frac{1}{2}(3I - A) = I_3$ et donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$

Exercice 11. Soit a_1, a_2, a_3 des réels non nuls et $M = \begin{pmatrix} 1 & a_1/a_2 & a_1/a_3 \\ a_2/a_1 & 1 & a_2/a_3 \\ a_3/a_1 & a_3/a_2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer M^2 et en déduire que M n'est pas inversible.

On trouve : $M^2 = 3M$ et donc $M(M - 3I) = 0$. Puisque $M - 3I \neq 0$, alors M n'est pas inversible. (cf exercice 13, résultat à connaître)

Exercice 12. Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tMM$ est bien définie et qu'elle est symétrique.

Deux méthodes :

1. **Méthode 1**. Soient $i, j \in [|1;n|]^2$. Alors :

$$\left({}^tMM\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \left({}^tM\right)_{ik} M_{kj} = \sum_{k=1}^{m} M_{ki} M_{kj} = \sum_{k=1}^{m} M_{kj} M_{ki} = \sum_{k=1}^{m} \left({}^tM\right)_{jk} M_{ki} = \left({}^tMM\right)_{ji}$$

   On en déduit que ${}^tMM$ est symétrique puisque son coefficient (i,j) est égal à son coefficient (j,i) pour tout couple (i,j) d'indices.

2. **Méthode 2**.

$${}^t\left({}^tMM\right) = {}^tM\,{}^t\left({}^tM\right) = {}^tMM$$

   On en déduit que ${}^tMM$ est symétrique, puisque cette matrice est égale à sa transposée.

Exercice 13. Soient A et B deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = 0$. Montrer que ni A ni B n'est inversible.

Par contraposée. Montrons que si A ou B est inversible, alors l'autre des deux matrices est nulle. Par disjonction de cas :

1. Si A est inversible et $AB = 0$, alors $A^{-1}AB = A^{-1} \times 0$ ie $B = 0$.
2. Si B est inversible et $AB = 0$, alors $ABB^{-1} = 0 \times B^{-1}$ ie $A = 0$

On reconnaît qu'un raisonnement par contraposée est adapté ici puisque toutes les propriétés mises en jeu «non inversible», «non nulle» sont négatives et moins manipulables que les formes affirmatives. (si A est inversible, on peut parler de son inverse, c'est pratique !)

Exercice 14. Soit $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale de coefficients diagonaux deux à deux distincts. Déterminer l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})$ qui commutent avec D.

Après quelques exemples particuliers, on conjecture que A commute avec D si et seulement si elle est diagonale. Il est clair que les matrices diagonales commutent entre elles, montrons l'implication réciproque en supposant que A est une matrice qui commute avec D. Alors pour $i, j \in [|1; n|]$:

$$(AD)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{kj} = a_{ij} d_{jj}$$

$$(DA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} a_{kj} = d_{ii} a_{ij}$$

On distingue alors deux cas de figure :

1. **Si** $i \neq j$: par hypothèse $d_{ii} \neq d_{jj}$. Alors l'égalité $d_{ii} a_{ij} = d_{jj} a_{ij}$ n'est possible que si $\boxed{a_{ij} = 0}$
2. **Si** $i = j$ alors l'égalité est tautologique.

On conclut que pour tout $i \neq j$, $a_{ij} = 0$, c'est-à-dire que A est **diagonale.**

Exercice 19. Trouver toutes les matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ dont le carré est égal à :

1. La matrice identité

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + ab & b^2 + ab \\ a^2 + ab & b^2 + ab \end{pmatrix}$$

   Pour que $A^2 = I$ soit vrai, il faudrait $a^2 + ab = 1$ et $a^2 + ab = 0$, ce qui est incompatible. Aucune matrice de cette forme ne vérifie $A^2 = I$

2. La matrice nulle
   En reprenant le même calcul que A^2, on obtient $A^2 = 0 \iff a(a + b) = b(a + b) = 0$. On obtient deux possibilités : $a + b = 0$ ou $a = b = 0$, qui implique aussi $a + b = 0$. Les solutions sont donc toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix}$

3. La matrice A
   On cherche cette fois les réels a, b tels que : $a^2 + ab = a$ et $b^2 + ab = b$ ie $a(a + b - 1) = 0$ et $b(a + b - 1 = 0)$ ce qui donne les deux possibilités : $a = b = 0$ ou $a + b = 1$. On a donc la matrice nulle comme solution, ainsi que toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$

Exercice 21 (Nilpotence)**.** *Une matrice carrée M est dite nilpotente s'il existe un entier naturel k tel que $M^k = 0$.*

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer A en la somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice nilpotente N, en vérifiant $DN = ND$. Vérifier que ça fonctionne avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puisque $N^2 = 0$
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
   Puisque $A = D + N$ et que $DN = ND$, on obtient $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} N D^{n-1}$
3. Peut-on étendre ce résultat à $n \in \mathbb{Z}$?
   Vérifier qu'avec la formule précédente $A^n A^{-n} = I$

Exercice 22 (Matrices stochastiques)**.** *Une matrice carrée est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs et que la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1*

1. Donner des exemples (variés) de matrices stochastiques de taille 2 ou 3
   L'identité, mais aussi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2. Montrer, d'abord en taille 2 puis en général, que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.
En taille générale : si A et B sont stochastiques, alors le coefficient i, j de AB est :
$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$
qui est positif comme somme de produits de nombres positifs. De plus, pour tout $i \in [|1; n|]$, la somme des coefficients de la ligne i est :
$$\sum_{j=1}^{n} (AB)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} b_{kj}$$
Puisque B est stochastique, $\sum_{j=1}^{n} b_{kj} = 1$ et donc on obtient :
$$\sum_{j=1}^{n} (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1 \text{ car } A \text{ est stochastique}$$

Exercice 23 (Matrices à diagonale dominante - lemme d'Hadamard). Soit $n > 2$ et $A \in_n (\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [|1, n|]$,
$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |aij|$$
Montrer par l'absurde que A est inversible.
Indication : Considérer une matrice colonne $X \neq 0$ telle que $AX = 0$ et i_0 un indice tel que $|X_{i_0}|$ soit maximal.
Comme indiqué par l'énoncé, supponsons par l'absurde que A n'est pas inversible : il existe alors (propriété du cours) une matrice colonne $X \neq 0$ telle que $AX = 0$, c'est-à-dire que pour tout $i \in [|1, n|]$:
$$(AX)_{i1} = 0 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$
En particulier, pour $i = i_0$, en isolant $k = i_0$ on obtient :
$$\sum_{k \neq i_0} a_{i_0 k} x_k = -a_{i_0 i_0} x_{i_0}$$
En passant à la valeur absolue :
$$\left| \sum_{k \neq i_0} a_{i_0 k} x_k \right| = |a_{i_0 i_0}| |x_{i_0}|$$
et grâce à l'inégalité triangulaire :
$$|a_{i_0 i_0}| |x_{i_0}| \leq \sum_{k \neq i_0} |a_{i_0} k| |x_k|$$
Puisque $|x_{i_0}|$ est maximal, on peut majorer tous les $|x_k|$ par $|x_{i_0}|$ et on obtient :
$$|a_{i_0 i_0}| |x_{i_0}| \leq \left(\sum_{k \neq i_0} |a_{i_0 k}| \right) |x_{i_0}|$$
Puisque X est non nul, $|x_{i_0}|$ est strictement positif (positivité car valeur absolue, strictement car non nul : puisque c'est le maximal, si il est nul les autres le sont aussi). On peut donc simplifier par $|x_{i_0}|$ et on obtient la contradiction avec l'hypothèse :
$$|a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{k \neq i_0} |a_{i_0 k}|$$