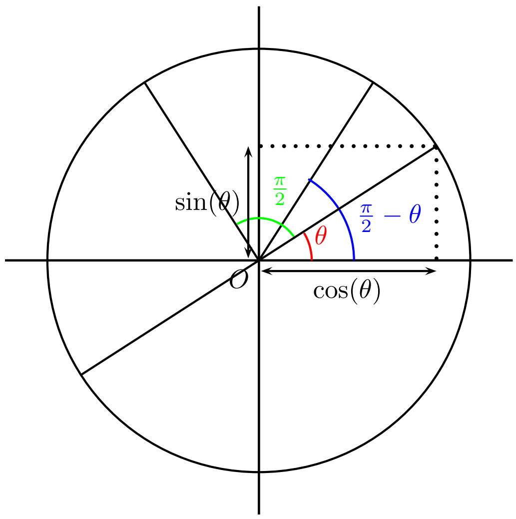
Chapitre 9 : Trigonométrie

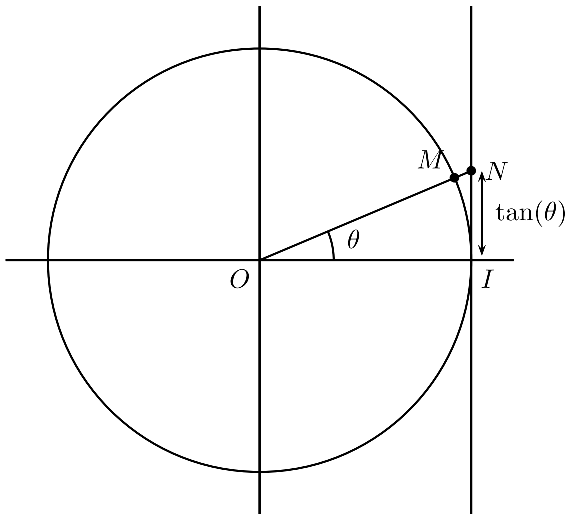
Analyse & Géométrie

I. Représentations graphiques

1. Cercle trigonométrique

Les fonction **sinus**, **cosinus** et **arctangente** et sont définies sur $\mathbb{R}$. La fonction **tangente** est définie sur $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$





Pour tout $x \in \mathbb{R}$, (sous réserve d'existence des objets)

- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
- $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- $\tan(x + \pi) = \tan(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
- $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

2. Cas d'égalité

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - y + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi \text{ ou } x = -y + 2k\pi)$$

$$\tan(x) = \tan(y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k\pi)$$

Ces propriétés illustrent en particulier le fait qu'aucune de ces trois fonctions n'est injective sur son domaine de définition ! En revanche, la restriction de **tan** à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est **bijective**, ce qui permet de définir la fonction **arctangente** sur $\mathbb{R}$.

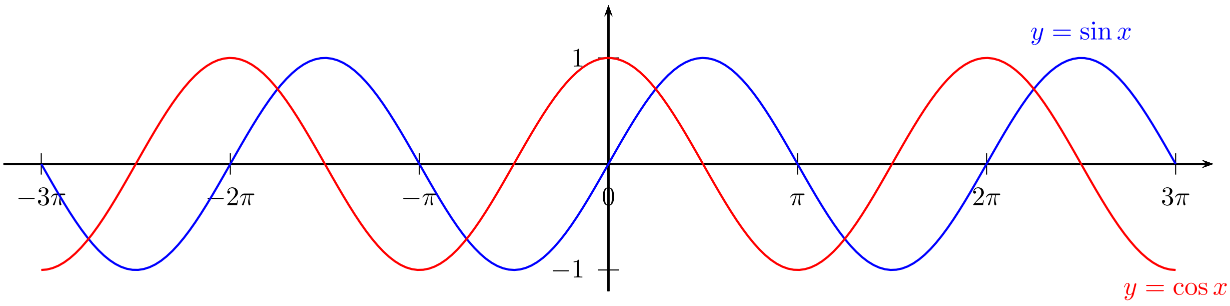
$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$$

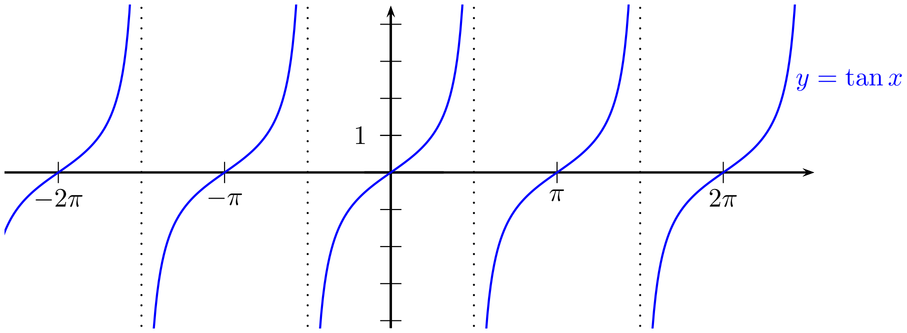
$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x$$

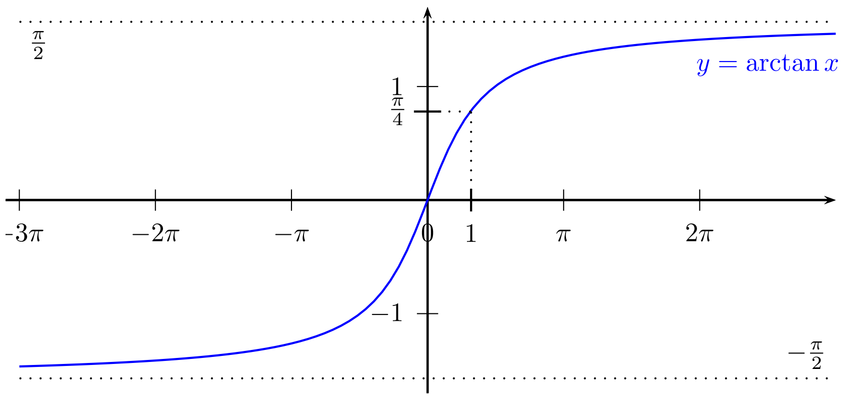
Si $x \in \mathbb{R}$,

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \arctan(\tan(x)) = x + k\pi$$

3. Graphes de fonctions



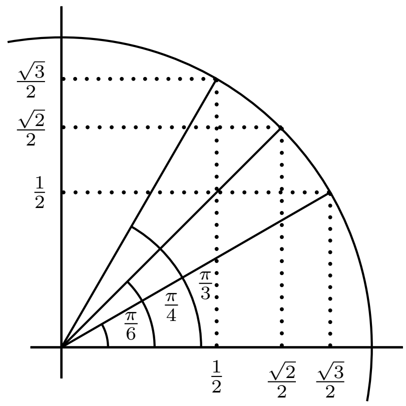




Remarque : attention aux graphiques, les axes des abscisses et des ordonnées n'ont pas la même échelle (pour pouvoir représenter plusieurs périodes sur la feuille)

II. Valeurs particulières

Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X



Il faut savoir en **déduire rapidement** les équivalents à $\pm\frac{\pi}{2}$

Exemples : $\cos(\frac{7\pi}{6}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Valeurs d'arctangente : $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et (moins connus) $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}, \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$

III. Formules, calculs

1. Addition

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$

De plus, si tout est bien défini,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Cas particuliers :

$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2, \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \quad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan(x)^2}$$

Retenir qu'il existe des **formules pour les produits** ($\cos(\alpha)\cos(\beta)$, ...), que l'on peut retrouver à partir des formules d'addition

2. Encadrements, limites

1. L'inégalité classique :
$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$$
2. Moins évident mais utile **proche de zéro** :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leqslant x$$
3. **Limites :**

(a) $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ (b) $\dfrac{\tan(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ (c) $\dfrac{\cos(x) - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

On verra un peu mieux plus tard dans l'année : $\frac{\cos(x)-1}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

3. Dérivées

Fonction	Dérivée
cos	$-\sin$
sin	$\cos$
tan	$\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
arctan	$\dfrac{1}{1 + x^2}$

De droite à gauche : connaître aussi pour savoir **primitiver**