Analyse 4

Chapitre 10 : Dérivation

Avant de commencer : sur une feuille blanche, écrire tout ce qu'on sait sur les dérivées - qu'est-ce que c'est ? à quoi ça sert ? comment ça marche ? quelles notions sont associées, quelles formules, propriétés ? à quoi ça fait penser ? est-ce que j'ai des dessins en tête liés à la dérivation ? Puis : prendre une feuille et pour les parties I et II, compléter le poly et répondre aux questions mais aussi ***ajouter par soi-même un maximum de questions et commentaires !***

! Le symbole ! représente des énoncés qui seront explicitement corrigés en classe.

I. Nombre dérivé

1. Définitions

a. Taux d'accroissement

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant les réels a et b, avec $a \neq b$. On appelle **taux d'accroissement** entre a et b la quantité

$$t_{ab}(f) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarque. Si f est croissante, alors ce taux est positif, et si f est décroissante, alors ce taux est négatif. Plus généralement, le taux d'accroissement exprime **à quelle vitesse** f a varié entre a et b

b. Nombre dérivé en a

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a. On dit que f est **dérivable en** a si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

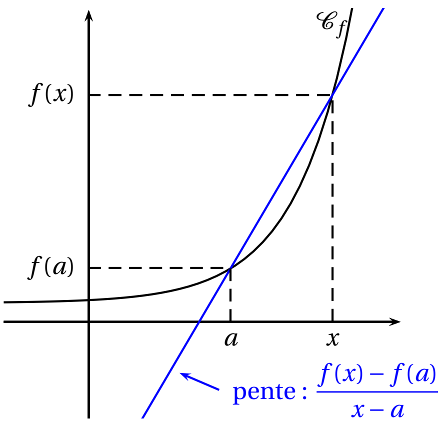
On note alors $f'(a) := \ell$.
Souvent, on reformule le taux d'accroissement sous la forme $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ où h a vocation à tendre vers 0

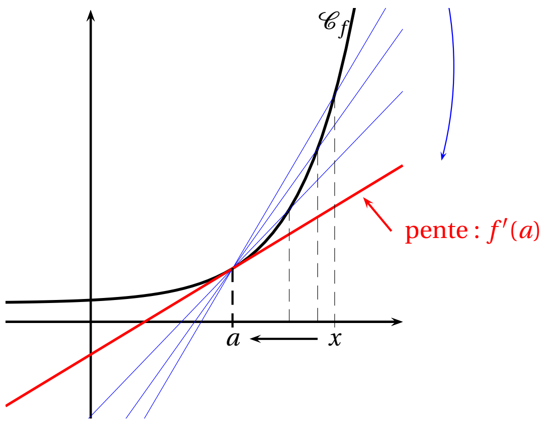
Propriété 3. Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Démonstration. Soit f une fonction dérivable en a. Alors :

$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a) \xrightarrow[x \to a]{} \dots\dots\dots$$

Compléter les pointillés. Comment a-t-on obtenu cette écriture de $f(x)$? Pourquoi ? En quoi cela permet de conclure que f est continue ? Cette propriété est-elle une équivalence ?





Exemples (Tout premiers exemples de calculs)**.**

- La fonction constante égale à 17 est dérivable en tout réel :

  Soit $f : x \mapsto 17$ et ....
  Le taux d'accroissement de f en a est : .... qui tend quand $x \to$ ...... vers ....
  Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) =$ ....

!

- La fonction racine carrée est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

Soit ....
Le taux d'accroissement ....

....
Pour calculer la limite, on utilise la méthode de la *quantité conjuguée*. On obtient : ....

....

Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = \dots\dots\dots$

- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 :
....
....
....

! *Exercice.* De même, déterminer la dérivée de la fonction carré en tout réel a. On reconnaîtra une identité remarquable.

♣ *Exercice.* En utilisant une formule du TD3 (qui généralise l'identité remarquable précédente), déterminer le nombre dérivé en a de la fonction $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Dérivée à droite et à gauche

Définition 4. Si le taux d'accroissement $t_{ax}(f)$ a une limite à droite (resp. à gauche) en a, alors on dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a. On note $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) le nombre dérivé associé.

Exemple. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 mais est dérivable à droite et à gauche en 0

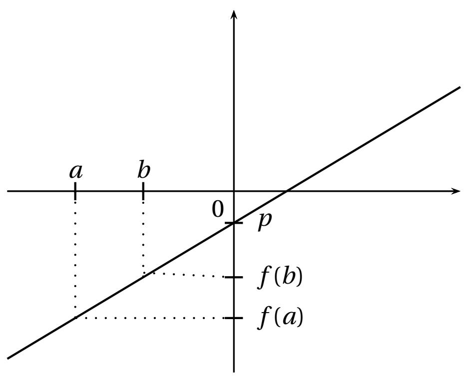
Le vérifier : quelle est la limite à gauche et quelle est la limite à droite ? Tracer la courbe de la fonction valeur absolue. À quoi ressemble ce point de non dérivabilité ? Peut-on fabriquer d'autres fonctions qui ne sont pas dérivables ?

Remarque. La propriété analogue sur les limites nous permet d'affirmer que f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite avec $f'_g(a) = f'_d(a)$

2. Tangente à la courbe

Déterminer la limite de f en a revient à approximer localement f par une constante. Dériver la fonction, cela revient à approximer localement la courbe de f par une droite, c'est-à-dire approximer f par une fonction affine : c'est un peu plus précis.

a. Rappels sur les fonctions affines



Propriété 5 (Rappels)**.**
- Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ et peut s'écrire sous la forme $x \mapsto mx + p$, où $m, p \in \mathbb{R}$ s'appellent respectivement **pente** (ou coefficient directeur) et **ordonnée à l'origine**
- La courbe représentative de f est une droite d'équation $y = mx + p$. Deux points (ou couples variable-image) suffisent à déterminer entièrement f
- Le taux d'accroissement d'une fonction affine est constant égal à m :
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq b \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$
- Connaissant un point $(a, f(a)) \in \mathscr{C}_f$ et la valeur de m, on peut déterminer
$$p = f(a) - ma$$

b. Équation de la tangente

♡ **Définition 6.** Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en a. La tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est la droite de pente $f'(a)$ passant par le point $M(a, f(a))$. Son équation est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exercice. Tracer un exemple de courbe d'une fonction f définie sur $]-3;+\infty[$ ayant une asymptote verticale d'équation $x=-3$, une asymptote oblique d'équation $y=3x-2$ en $+\infty$ et vérifiant :

a	$f(a)$	$f'(a)$
-2	1	-2
-1	1	0
0	0	1

II. Fonctions dérivables sur un intervalle

1. Ensembles de fonctions dérivables

On considère dans toute la suite que les fonctions sont définies sur un **intervalle** I. Comme pour le chapitre sur la continuité, après l'étude locale, on s'intéresse à ce qu'on peut dire d'une fonction qu'on sait **globalement** dérivable. Si on n'est pas sur un intervalle : étudier sur des intervalles.

Définition 7. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On note alors f' la fonction qui à chaque a associe le nombre dérivé en a.

Les fonctions dérivables sont en particulier continues. Ainsi, une fonction dérivable est « mieux » qu'une fonction « seulement » continue. Et on peut pousser plus loin la régularité ...

Définition 8. On dit qu'une fonction f est **continûment dérivable** si elle est dérivable et que f' est continue. On note $\mathscr{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur I

Remarque. On notera ensuite $\mathscr{C}^2$ les fonctions dont la dérivée est elle-même $\mathscr{C}^1$, et ainsi de suite par récurrence. On en reparlera dans un chapitre futur.

2. Opérations

Propriété 9 (Rappels)**.** Soit I un invervalle et u, v deux fonctions définies et dérivables sur I. Soit λ un réel. Alors

1. $u+\lambda v$ est dérivable sur I et $(u+\lambda v)' = u' + \lambda v'$ (linéarité)
2. uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$
3. $\dfrac{u}{v}$ est dérivable en tout point a de I où $v(a) \neq 0$ et alors : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(a) = \dfrac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}$

Démonstration.

1. Soit $a \in I$. Alors, le taux d'accroissement de $u+\lambda v$ en a est :
$$\frac{(u+\lambda v)(x) - (u+\lambda v)(a)}{x-a} = \frac{u(x)-u(a)}{x-a} + \lambda \frac{v(x)-v(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} u'(a) + \lambda v'(a)$$
donc $(u+\lambda v)$ est dérivable en a de nombre dérivé $u'(a)+\lambda v'(a)$, et ce pour tout $a \in I$.
2. *Adapter la démonstration précédente, en écrivant :* $uv(x) - uv(a) = u(x)v(x) - u(a)v(a) = u(x)v(x) - u(x)v(a) + u(x)v(a) - u(a)v(a)$. *On pourra utiliser que* u, v *sont continues en* a.
3. ! Commençons par montrer que $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$.
Puisque $v(a) \neq 0$ et que v est continue en a, il existe un intervalle $J = [a-\alpha; a+\alpha]$ où v est non nulle et donc $\frac{1}{v}$ bien définie. Alors pour tout $x \in J$:
$$\frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{v(a)}}{x-a} = \frac{v(a)-v(x)}{v(x)v(a)(x-a)}$$
....
....
....
Écrivons maintenant : $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$. D'après l'item 2 et la propriété précédente :
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' =$ ....

Exemple. Cas particulier $u=1$ dans la formule du quotient - utilisé dans la démonstration.

Exemple. Toute fonction polynômiale est dérivable en tout réel. La fonction inverse est dérivable en tout réel non nul.

Pourquoi ? En quoi est-ce un exemple des propriétés précédentes ? Quels autres exemples peut-on trouver à ce stade ?

♡ **Propriété 10** (Composition)**.** Soient I, J deux intervalles, avec $f : I \to J$ dérivable sur I et J dérivable sur J. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et
$$\forall a \in I, (g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

Démonstration. Soit $a \in I$. Posons $b = f(a)$ et $\phi : x \mapsto \begin{cases} g'(b) & \text{si } x = b \\ \frac{g(x)-g(b)}{x-b} & \text{sinon} \end{cases}$. ϕ ainsi définie est **continue en** b

Pourquoi ? ....

Par ailleurs, pour tout $y \in J$, $g(y) - g(b) = \phi(y)(y - b)$.

Pourquoi ?..........

Alors, pour tout $h > 0$ (suffisamment petit pour que tout soit bien défini) :

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} &= \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} \\ &= \frac{g(f(a+h)) - g(b)}{h} \\ &= \phi(f(a+h)) \times \frac{(f(a+h) - b)}{h} \end{aligned}$$

car $f(x+h) \in J$ et $f(a) = b$.

On peut alors faire tendre h vers 0 : $\phi(f(a+h)) \xrightarrow[h\to 0]{} \phi(b) = g'(b)$ par continuité de ϕ, et $\frac{f(a+h)-b}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)$ par dérivabilité de f.

On déduit : $g \circ f$ dérivable en a et :
$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(b) = f'(a) \times g'(f(a))$$

Exercice. Déterminer le nombre dérivé de $x \mapsto \sin(\sqrt{x})$ en 1

♡ **Exemples.** Exprimer pour u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ la dérivée de :

- $\sin u$
- $\cos u$
- $\tan u$, si $\tan \circ u$ est bien définie
- $\ln|u|$, où u ne s'annule pas

Propriété 11 (Bijection réciproque)**.** Soit f une fonction bijective de I dans J, dérivable sur I et $b \in J$ tel que f' ne s'annule pas en $f^{-1}(b)$. Alors f^{-1} est dérivable en b et

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$$

♣ *Démonstration.* Remarquons d'abord que f bijective dérivable est continue donc strictement monotone et qu'alors sa réciproque est continue sur J. *Détail technique laissé en exercice ici (admis en colle)*

! Soit $a \in I$ et $b = f(a) \in J$ tel que $f'(a) \neq 0$. Pour $y \in J$,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}$$

Alors, par continuité de f^{-1} en b, $f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to b]{} a$. Ainsi, par composition de limites, puisque $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$,

$$\frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))} \xrightarrow[y\to b]{} \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Et si $f'(a) = 0$? ....

Remarque. On **retrouve** rapidement la formule en dérivant l'égalité $(f \circ f^{-1})(x) = x$ (pas une démonstration!).

Exemple. La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée ....
Tracer l'allure (avec la tangente en 0)

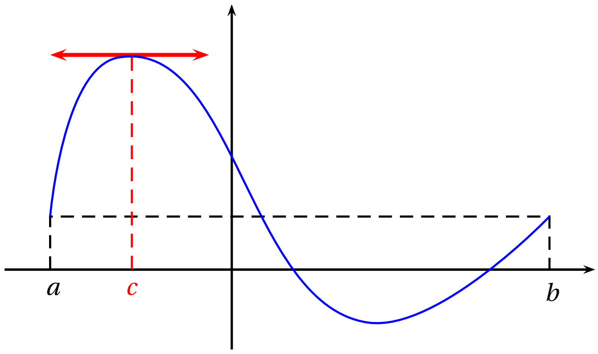
3. Le théorème de Rolle

a. Théorème de Rolle

Théorème 12. Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ et f une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ vérifiant $f(a) = f(b)$. Alors

$$\exists c \in]a; b[, f'(c) = 0$$

Remarque. c n'est pas unique (illustration !).



Démonstration. Remarquons d'abord que si f est constante, le résultat est évident car ....
Supposons donc f non constante. f étant continue sur le segment $[a; b]$, par théorème des bornes, f admet un maximum M et un minimum m. Puisque f n'est pas constante, au moins m ou M n'est pas égal à $f(a)$ car $f(a) = f(b)$.
Expliquer cet argument. ....
Supposons par exemple que le maximum M est atteint en un point $c \in]a; b[$. Puisque $f(c)$ est le maximum de c alors pour tout $x \in]a; b[$, ...
On en déduit que pour $x > c$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ est de signe .... et que pour $x < c$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ est de signe .... En passant à la limite : $\boxed{f'(c) = 0}$

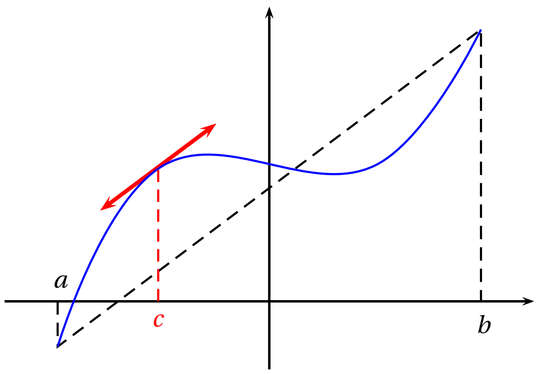
b. Égalité et inégalité des accroissements finis

Théorème 13 (EAF)**.** Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ et f une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. Alors

$$\exists c \in]a; b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g : x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} x$

Remarque. Très utile pour déduire des propriétés sur f à partir de propriétés sur f'



Propriété 14 (Corollaire : inégalité des accroissements finis)**.**

- Si m, M sont des réels vérifiant pour tout $x \in]a; b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$$

- Si $M > 0$ et que f est dérivable sur un intervalle I, avec $|f'| \leqslant M$ sur I, alors

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$$

Démonstration. Appliquer le théorème 13 puis encadrer.

Remarque. Pour trouver des bornes m et M intelligentes, on réfléchira bien à l'intervalle sur lequel on applique le théorème. Les bornes m, M peuvent dépendre de a et b

Exemples. Montrer que

- pour tous réels x, y, $|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant |x - y|$
- pour tout réel x, $|\sin(x)| \leqslant |x|$

c. Application à une suite récurrente

!

♡ *Exercice.* Soit $a \geqslant 0$. On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right) \end{array}$

1. Justifier que $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$
2. Montrer que pour $u_0 > 0$, la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.
3. On cherche à étudier la convergence de (u_n). Déterminer sa seule valeur possible de limite ℓ
4. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$$
5. En déduire que (u_n) converge.

♠ *Remarque.* Dans l'exercice précédent, ce qui fait fonctionner la preuve est le fait que f' soit petite en valeur absolue, en particulier au voisinage de ℓ. On dit que ℓ est un point fixe **attractif** de f quand $|f'(\ell)| < 1$ et répulsif si $|f'(\ell)| > 1$. Les points fixes attractifs « attirent », c'est-à-dire que les suites récurrentes qui commencent suffisamment proche convergent vers le point fixe.

4. Conséquences : prolongement, variations d'une fonction dérivable

Propriété 15 (Prolongement $\mathscr{C}^1$)**.** Si $x_0 \in I$ et que f est continue sur I, dérivable sur $I\backslash\{x_0\}$ et que $f' \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$
En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$, f est dérivable sur I et f' est continue en x_0

Propriété 16 (Dérivée nulle)**.** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I vérifiant $f' = 0$. Alors f est constante sur I

Démonstration. Soient $x, y \in I$.
Appliquer le théorème des accroissements finis et montrer que $f(x) = f(y)$

Exemple. Contre-exemple si I n'est pas un intervalle : $\lfloor . \rfloor$ sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$

♣ **Exemple.** Deux fonctions f, g dérivables sur un intervalle I et vérifiant $f' = g'$ sont égales à une constante près :
$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = g(x) + c$$

On montre enfin le résultat bien connu sur les dérivées :

Propriété 17 (Dérivée de signe constant)**.** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors,
- Si $f' \geqslant 0$, f est croissante. Si $f' > 0$, f est strictement croissante.
- Si $f' \leqslant 0$, f est décroissante. Si $f' < 0$, f est strictement décroissante.

Démonstration. Soient $x, y \in I$. Supposons $x \leqslant y$. *Dans les quatre cas, utiliser le théorème des accroissements finis pour montrer $f(x) \leqslant f(y), f(x) \geqslant y, f(x) < y$ ou $f(x) > f(y)$*

Exercice. Dresser le tableau de variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

Remarque. La réciproque n'est pas vraie pour la **stricte** montonie (Conservation des inégalités LARGES à la limite) : contre-exemple de $x \mapsto x^3$

♣ **Propriété 18** (Affaiblissement des hypothèses)**.** Si f' est positive (au sens large) et s'annule en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.
Indication : raisonner par contraposée.

Exercice. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x)$ est strictement croissante sur $[-5; 5]$

III. APPLICATION (ET RAPPELS) : L'EXPONENTIELLE ET SA FAMILLE

On ne démontrera pas pour le moment l'existence de la fonction exponentielle. Attendre le chapitre d'intégration pour une construction (un peu plus) complète en exercice.

1. L'exponentielle : solution d'une équation différentielle

Propriété 19. Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f(0) = 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$$

Démonstration. On ne démontrera que l'unicité, en étudiant $h : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$

Définition 20. On appelle **exponentielle** cette fonction et on note $\exp(x)$ ou e^x l'image d'un réel x

Propriété 21. La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

♣ *Démonstration.* Montrer d'abord que $\exp(x)\exp(-x)$ est constante égale à 1

Propriété 22.
- pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$e^{x+y} = e^x e^y$$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\exp(-x) = \frac{1}{e^x}$ et $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

♣ *Démonstration.* Poser pour tout y la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x+y)}{f(x)}$. Deuxième point par récurrence

2. Logarithme népérien

Propriété 23. exp est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ donc admet une application réciproque dérivable de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$

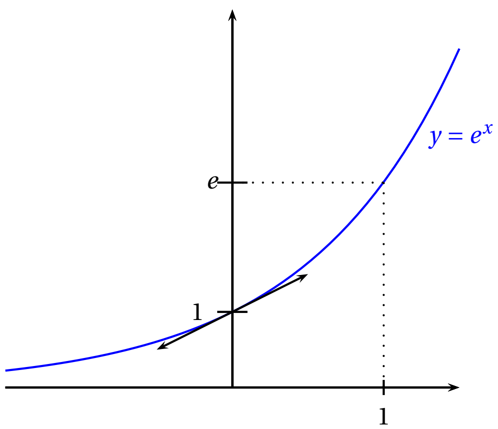
Démonstration. Limites + théorème de la bijection + dérivée de la réciproque

Définition 24. On appelle **logarithme népérien**, noté ln, la bijection réciproque de l'exponentielle. On rappelle que les courbes de ces deux fonctions sont **symétriques par rapport à la droite d'équation** $y = x$ (cf. chapitre 6).
Pour tous $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+^*$,

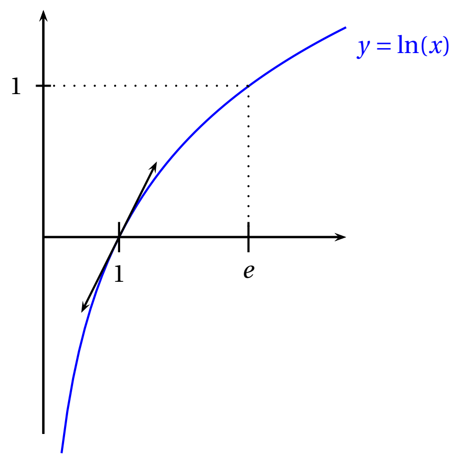
$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

Propriété 25. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$



Remarque : pour y voir quelque chose, la figure est étirée horizontalement : la tangente en 0 est la droite d'équation $y = x + 1$ de pente 1



Remarque : Au contraire ici, la figure est étirée verticalement. La tangente en 1 est la droite d'équation $y = x - 1$ de pente 1

3. Fonctions puissances, logarithme de base b

Définition 26. Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on note a^x le réel :

$$a^x := \exp(x \ln(a))$$

♡ **Propriété 27** (Dérivée)**.** La dérivée de la fonction $x \mapsto a^x$ est la fonction

$$x \mapsto \ln(a) a^x$$

Propriété 28. La fonction puissance a^x est bijective et admet donc une fonction réciproque notée $\log_a$ et appelée **logarithme de base** a. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Démonstration.

Formulaire

Dérivées usuelles

Expression	Domaine	Dérivée
x^n, $n \in \mathbb{N}$ **Exemples :** constantes, affines, carré	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
x^n, $n \in \mathbb{Z}$ **Exemples :** fonction inverse	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ **Exemples :** racines carrée, cubique	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
α^x, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\ln(\alpha)\alpha^x$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x), \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x), -\sin(x)$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Formules de dérivation Savoir appliquer la composition à toutes les fonctions usuelles.

- $(\lambda u)' = \lambda u'$
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(\sum_{k=1}^{n} u_k)' = \sum_{k=1}^{n} u_k'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $(\frac{1}{v})' = \frac{-v'}{v^2}$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- $(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$
- $(u^{-1})' = \frac{1}{u' \circ u^{-1}}$

Exponentielle et logarithme On retient surtout l'idée que le logarithme permet de transformer des produits en sommes (plus manipulables)

- $e^{a+b} = e^a e^b$
- $\exp(\sum_{k=1}^{n} a_k) = \prod_{k=1}^{n} e^{a_k}$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(\prod_{k=1}^{n} a_k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)$
- $e^{nx} = (e^x)^n, n \in \mathbb{Z}$
- $\ln(x^n) = n\ln(x), n \in \mathbb{N}$

Formules équivalentes pour les différences et les quotients.

Voir chapitre 6 et TD10 pour les limites et encadrements