Devoir Maison n°7 - Matrices stochastiques

Soit n un entier et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est **stochastique** si :

- $\forall (i,j) \in [|1,n|]^2, m_{ij} \geqslant 0$
- $\forall i \in [|1,n|], \sum\limits_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$

1. Justifier que $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice stochastique.
   Dans cette question on demande seulement de vérifier la définition donnée dans l'encart : tous les coefficients sont positifs ou nuls, la somme des coefficients ligne par ligne est 1
2. Donner un exemple de matrice stochastique à coefficients non entiers, et un exemple de matrice non stochastique.
   Une matrice non stochastique : facile, n'importe quoi avec au moins un coefficient négatif par exemple. Une matrice stochastique avec des coefficients non entiers, par exemple : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, etc.
3. En utilisant la formule du produit matriciel, montrer que si A, B sont deux matrices stochastiques, alors AB est stochastique.
   Soient A, B deux matrices stochastiques.
   (a) Soit $(i,j) \in [|1,n|]^2$. $(AB)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$. Puisque les coefficients de A et de B sont positifs par hypothèse, alors $(AB)_{ij} \geq 0$ (somme de nombres positifs)
   (b) De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}(AB)_{ij} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ik}B_{kj} \text{ en inversant les sommes} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \sum_{j=1}^{n} B_{kj} \text{ car } A_{ik} \text{ ne dépend pas de } j \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \times 1 \text{ car } B \text{ est stochastique} \\
&= 1 \text{ car } A \text{ est stochastique}
\end{aligned}$$

   Ainsi, $\sum\limits_{j=1}^{n} (AB)_{ij} = 1$ et $\boxed{(AB) \text{ est stochastique.}}$
4. Montrer que si A est stochastique, alors pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, A^p est stochastique.
   Ce résultat se montre par récurrence immédiate à partir de la propriété précédente, en vérifiant dans l'initialisation que I_n est une matrice stochastique (comme dans la question 1)
5. Montrons que si A est stochastique **et inversible** et que A^{-1} est stochastique, alors A ne contient que des 0 et des 1. Notons (a_{ij}) les coefficients de A et (b_{ij}) les coefficients de A^{-1}
   (a) Soit $(i,j) \in [|1;n|]^2$ avec $i \neq j$. Justifier :
$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = 0$$
   Puisque (b_{ij}) sont les coefficients de A^{-1}, cette propriété découle directement de l'information $A^{-1}A = I_n$, et plus précisément $(A^{-1}A)_{ij} = 0$ pour $i \neq j$
   (b) En déduire que pour tout $k \in [|1;n|]$, $b_{ik}a_{kj} = 0$ puis que pour tout $(i,k) \in [|1;n|]^2$ tels que $b_{ik} \neq 0$, alors pour tout $j \neq i$, $a_{kj} = 0$
   On peut alors trouver $i \neq j$ deux entiers entre 1 et n (en tout cas dès que $n \geq 2$) et appliquer le résultat de la question précédente. Puisque A, B sont stochastique, tous les termes de la somme sont positifs : pour que la somme soit nulle, il faut alors que chacun des termes de la somme soit nul, c'est-à-dire : $\forall k \in [|1;n|], b_{ik}a_{kj} = 0$. Pour tout k tel que $b_{ik} \neq 0$, alors $a_{kj} = 0$, et ce pour tout couple (i,j) avec $i \neq j$.

(c) On rappelle qu'une matrice inversible n'a pas de colonne nulle. Soit $k \in [|1;n|]$. Justifier qu'il existe un $i \in [|1;n|]$ tel que $b_{ik} \neq 0$.
C'est quasiment la définition de «A^{-1} n'a pas de colonne nulle» : si k est le numéro de la colonne, alors pour que la colonne k ne soit pas nulle, il faut qu'il y ait au moins un coefficient i tel que le coefficient de la i ème colonne soit non nul : $b_{ik} \neq 0$

(d) Montrer que pour chaque ligne de A contient un seul coefficient non nul.
C'est une question de synthèse des questions précédente : Prenons $k \in [|1,n|]$. D'après la question précédente, il existe $i \in [|1;n|]$ tel que $b_{ik} \neq 0$. D'après la question (b), on peut alors en déduire que pour tout $j \neq i$, $a_{kj} = 0$. Ainsi, dans la k-ème ligne de la matrice A, tous les coefficients sont nuls, sauf éventuellement celui qui se trouve dans la colonne i. De plus, celui-ci ne peut pas être nul, sinon la somme des coefficients de la ligne serait 0 et la matrice ne serait pas stochastique. Il y a donc effectivement un unique coefficient non nul a_{ki}.

(e) Conclure.
On a déjà montré que chaque ligne contient un seul coefficient non nul, tous les autres sont donc égaux à 0. Pour que la somme des coefficients de chaque ligne soit égale à 1, il faut alors que le coefficient restant soit un 1, et la propriété est démontrée.

6. La réciproque est-elle vraie ?
Deux interprétations de ce que veut dire ici «la réciproque», toutes deux fausses :
— si A ne contient que des 0 et des 1, elle est stochastique, inversible et son inverse est stochastique. C'est faux, par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas stochastique
— si A est stochastique et ne contient que des 0 et des 1, elle est inversible (et son inverse est stochastique). C'est faux, par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est stochastique non inversible.

7. Posons $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.Montrer que si M est stochastique alors $MX_0 = X_0$.
Soit $i \in [|1;n|]$. Montrons que $(MX_0)_i = (X_0)_i = 1$.
Par définition, $(MX_0)_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}(X_0)_k = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \times 1 = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = 1$ par définition d'une matrice stochastique.

8. Soit $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ **non nul** et λ un réel tels que $MX = \lambda X$. Montrons que $|\lambda| \leqslant 1$.
(a) Posons i_0 un entier entre 1 et n tel que $|X_{i_0}|$ soit maximal. Justifier que i_0 existe et que $|X_{i_0}| \neq 0$.
L'ensemble $\{|X_i|, i \in [|1;n|]\}$ est fini donc atteint un maximum. Ce maximum n'est pas nul car sinon, on aurait pour tout $i \in [|1;n|]$, $0 \leq |X_i| \leq |X_{i_0}| \leq 0$ c'est-à-dire $|X_i| = 0$ i.e. $X_i = 0$. Ceci étant pour tout i, on aurait alors $X = 0$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.
(b) Montrer : $\sum_{k=1}^{n} M_{i_0,k}X_k = \lambda X_{i_0}$
On utilise l'hypothèse $MX = \lambda X$, appliqué à la ligne i_0.
(c) Montrer : $\left|\sum_{k=1}^{n} M_{i_0,k}X_k\right| \leqslant |X_{i_0}|$
Par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} M_{i_0;k}X_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} M_{i_0;k}|X_k| \text{ car } M_{i_0;k} \geq 0 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} M_{i_0;k}|X_{i_0}| \text{ car } |X_{i_0}| \text{ est maximal} \\
&\leq |X_{i_0}| \sum_{k=1}^{n} M_{i_0;k} \\
&\leq |X_{i_0}| \text{ car } M \text{ est stochastique}
\end{aligned}$$

(d) Conclure.
On tire des deux questions précédentes : $|\lambda X_{i_0}| \leq |X_{i_0}|$ et en divisant par $|X_{i_0}|$ qui est strictement positif (question (a)) : $|\lambda| \leq 1$