Feuilles d'exercices n 10

Exercice 2. En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes :
On ne se soucie pas ici d'avoir un fil déductif : dans le cours, on a démontré certaines dérivées en admettant des limites, on montre ici les limites en utilisant des dérivées, on ne vérifie pas qu'aucun raisonnement n'est circulaire mais seulement qu'on sait passer de l'un à l'autre !

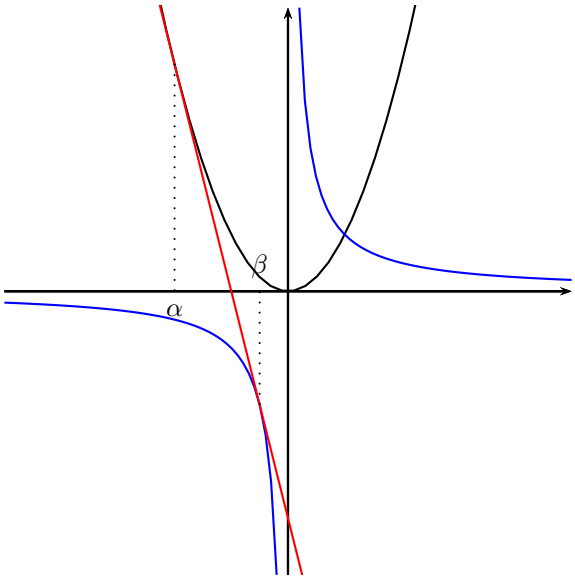
1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x+2}-e^2}{x^2}$
   En posant $f : x \mapsto e^{3x+2}$, ce qu'on calcule est ici la limite de $\frac{f(x)-f(0)}{x(x-0)}$. Puisque f est dérivable, de dérivée $x \mapsto 3e^{3x+2}$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ a une limite finie en 0 ($3e^2$) et la limite étudie est donc $\pm\infty$ en 0^+ et 0^-
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$
   De même avec la fonction cosinus, la limite est $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$
   En posant $g : x \mapsto \ln(2-x)$ qui vérifie $g(1) = 0$, on cherche la limite de $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$. Or, g est dérivable pour $x < 2$ avec $g'(x) = -\frac{1}{2-x}$ et donc $g'(1) = -1$. Ainsi, $\frac{\ln(2-x)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} -1$
   Remarque : hors contexte, on peut aussi poser $x = 1+u$ où $u \to 0$ et donc chercher la limite en 0 de $\frac{\ln(2-(1+u))}{1+u-1} = \frac{\ln(1-u)}{u} = -\frac{\ln(1-u)}{-u} \to -1$ grâce à la limite usuelle du chapitre 6.
4. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{2\exp(\cos(x))-1}{x-\frac{\pi}{2}}$
   Au vu de l'énoncé, la limite du numérateur est $2\exp(0) - 1 = 1$ et celle du dénominateur $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ et la limite est $\frac{2}{\pi}$. Il y a une erreur, on cherche en fait à trouver : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\cos(x))-1}{x-\frac{\pi}{2}}$.
   Ici c'est bien une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ qui se résout en posant $g : x \mapsto \exp(\cos(x))$ et en remarquant qu'on cherche alors $\frac{g(x)-g(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}$ qui tend vers $g'(\frac{\pi}{2})$. En effet, g est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\sin(x)\exp(\cos(x))$ d'où $g'(\frac{\pi}{2}) = 1 \times \exp(0) = 1$

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 1 < x. \end{cases}$

1. Montrer que la dérivée de f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ avec :
   $$\forall x < 1, f'(x) = \frac{-2x}{2} = -x$$
   $$\forall x > 1, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
   f' est donc continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et en 1 : $f'(x) \to -1$ à gauche et à droite. Ainsi, f' se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$
2. Montrer qu'il existe $c \in]0, 2[$ tel que $f(2) - f(0) = (2-0)f'(c)$.
   f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et en 1 (limites évidentes) donc f est continue sur $[0; 2]$, f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}1$ et f' a une limite en 1 donc on peut appliquer le **théorème de prolongement de la dérivée** pour dire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(1) = -1$. Ainsi, le **théorème des accroissements finis** s'applique à f sur le segment $[0; 2]$.
3. Déterminer les valeurs possibles pour c.
   C'est-à-dire : faire la question précédente mais sans le théorème, en gros. On commence par : $f(2) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = \frac{3}{2}$ et alors on cherche à résoudre : $-1 = 2f'(c)$ ou encore $f'(c) = -\frac{1}{2}$
   (a) Pour $c < 1$: ça voudrait dire $-c = -\frac{1}{2}$ i.e. $c = \frac{1}{2}$. Puisque $\frac{1}{2} < 1$, c'est effectivement une solution.
   (b) Pour $c > 1$: on cherche c tel que $-\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2}$ ie $c^2 = 2$ ie $c = \sqrt{2}$
   (c) $c = 1$ n'est pas solution.

   Il y a donc deux solutions : $c \in \{\frac{1}{2}; \sqrt{2}\}$

Exercice 9. Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \frac{1}{x}$ admettent une unique tangente commune.



On trace ici les courbes des fonctions carré et inverse et on observe (graphiquement dans un premier temps) cette tangente commune, représentée en rouge ici, qui est tangente à la courbe de la fonction carré en α et à la fonction inverse en β. On cherche α, β via les équations de tangente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2\alpha(x-\alpha) + \alpha^2 = -\frac{1}{\beta^2}(x-\beta) + \frac{1}{\beta}$$

c'est-à-dire en identifiant pente et ordonnée à l'origine :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2\alpha^2 + \alpha^2 & = & \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} \\ 2\alpha & = & -\frac{1}{\beta^2} \end{array}\right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & -\frac{1}{2\beta^2} \\ -\alpha^2 & = & \frac{2}{b} \end{array}\right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & -\frac{1}{2\beta^2} \\ \beta^3 & = & -\frac{1}{8} \end{array}\right.$$

On résout ces équations en $\beta = -\frac{1}{2}$ et $\alpha = -2$, la solution est effectivement unique et ces deux valeurs (en abscisse) semblent correspondre à la conjecture graphique.

Exercice 10. On étudie la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+x}{3x+1}$

1. Déterminer le domaine de dérivabilité de f
   f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{3}\}$
2. Déterminer le tableau de variation de f.
   Pour tout $x \neq -\frac{1}{3}$,

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(3x+1) - 3(x^2+x)}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2+2x+1}{(3x+1)^2}$$

Le numérateur ne s'annule jamais (polynôme du second degré) donc f' est toujours positive et donc f est croissante sur **chacun des deux intervalles de son ensemble de définition**. On déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites en $\pm\infty$ se trouvent en factorisant par x^2 au numérateur et par $3x$ au dénominateur.

3. Tracer les tangentes en $-1, 0, 1$
   On calcule les valeurs de $f'(-1), f'(0), f'(1), f(-1), f(0), f(1)$ (on a déjà une expression de f')
4. Déterminer les asymptotes éventuelles de f puis tracer lallure de sa courbe
   Il y a une asymptote verticale d'équation $y = -\frac{1}{3}$ et aucune asymptote horizontale. Cherchons une asymptote oblique en $\pm\infty$.
   Pour $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{x+1}{3x+1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \frac{1}{3}$ et $f(x) - \frac{x}{3} = \frac{3(x^2+x)-x(3x+1)}{3(3x+1)} = \frac{2x}{9x+3} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \frac{2}{9}$. Il y a donc en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation : $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$.
   Tracer ensuite une courbe qui vous semble correspondre au tableau de variations, aux tangentes, aux asymptotes trouver, et vérifier la vraisemblance de votre courbe (calculatrice, Python, Wolfram Alpha, Geogebra...)

Exercice 13. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = \lim\limits_{+\infty} f = 0$. On souhaite démontrer qu'il existe $d \in]0, +\infty[$ tel que $f'(d) = 0$. Le résultat étant trivial si $f = 0$, on suppose que ce n'est pas le cas

1. Écrire la négation de « f est la fonction nulle »
$$\exists x \in [0; +\infty[, f(x) \neq 0$$
2. On suppose quil existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(c) > 0$. Démontrer quil existe $a \in]0; c[$ et $b \in]c; +\infty[$ tels que $f(a) = f(b)$
   On peut par exemple utiliser le théorème des valeurs intermédiaires sur chacun de ces deux intervalles pour montrer qu'il existe a et b tels que $f(a) = f(b) = \frac{f(c)}{2}$
3. Conclure
   D'après la question précédente, il existe a, b dans $\mathbb{R}_+$ tels que $f(a) = f(b)$ et f est dérivable sur $[a; b]$ donc par théorème de Rolle, il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tels que $f'(c) = 0$

Exercice 16. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n)$

1. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution dans $[0, 1]$, notée α.
   On pose $f : x \mapsto \cos(x) - x$. f est dérivable sur $[0; 1]$ avec pour tout x, $f'(x) = -\sin(x) - 1 \leq 0$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $[0; 1]$. Puisque $f(0) = \cos(0) = 1$ et que $f(1) = -1$, et que f est continue, par théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α tel que $f(\alpha) = 0$ i.e. $\cos(\alpha) = \alpha$
2. Justifier que :
$$\forall x \in [-1, 1], |\cos'(x)| \leq \sin(1)$$
   .
   Pour tout $x \in [-1; 1]$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et donc $|\cos'(x)| = |\sin(x)|$. Puisque la fonction sin est impaire, le maximum de $|\sin(x)|$ sur $[-1; 1]$ est le maximum de $|\sin(x)|$ sur $[0; 1]$, c'est-à-dire $\sin(1)$ (par croissance de sin sur $[0; 1] \subset [0; \frac{\pi}{2}]$).
3. Montrer alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \sin(1) \times |u_n - \alpha|.$$
   D'après l'inégalité des accroissements finis et la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\cos(u_n) - \cos(\alpha)| \leq \sin(1)|u_n - \alpha|$ i.e. $|u_{n+1} - \alpha| \leq \sin(1)|u_n - \alpha|$
4. En déduire que (u_n) converge vers α
   On montre par récurrence immédiate (qu'on commence à connaître !) que pour tout entier n,
$$|u_n - \alpha| \leq \sin(1)^n |u_0 - \alpha| = \sin(1)^n \alpha$$
   Puisque $1 < \frac{\pi}{2}$, $\sin(1) < 1$ et donc (convergence des suites géométriques) , $\alpha \sin(1)^n \to 0$ et donc par théorème des gendarmes $|u_n - \alpha| \to 0$ ie $u_n \to \alpha$

Exercice 19. Résoudre le système suivant, où x, y et z sont des réels positifs :
$$\begin{cases} x^3y^2z^6 &= 1 \\ x^4y^5z^{12} &= 2 \\ x^2y^2z^5 &= 3 \end{cases}$$

L'idée à garder pour toujours : $\ln$ est une machine (baguette magique ?) à transformer les produits en sommes !
Posons : $a = \ln(x), b = \ln(y), c = \ln(z)$. Ces trois quantités sont bien définies car x, y, z sont positifs, et non nuls (sinon les produits seraient nuls).
Le système devient alors :

$$\begin{cases} 3a + 2y + 6z = 0 \\ 4a + 5y + 12z = \ln(2) \\ 2a + 2y + 5z = \ln(3) \end{cases}$$

que l'on peut ensuite résoudre avec les outils usuels !

♡ **Exercice 20.** Montrer que $f : x \mapsto \ln|x|$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, déterminer sa dérivée
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f(x) = \ln(x)$ et donc $f'(x) = \frac{1}{x}$ et pour $x < 0$, $f(x) = \ln(-x)$ et donc $f'(x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}_*$ avec pour tout $x \neq 0, f'(x) = \frac{1}{x}$.
C'est surtout utile dans l'autre sens : quand on cherche à primitiver la fonction inverse (dans un chapitre prochain !), on trouve $\ln|x|$ et pas seulement $\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 22 (Une équation)**.** L'objectif est de résoudre pour a et b **entiers strictement positifs** l'équation

$$a^b = b^a$$

On supposera $a < b$

1. Montrer que l'équation est équivalente à $\frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b}$
   En revenant à la définition :

$$\begin{aligned} a^b = b^a &\iff \exp(b\ln(a)) = \exp(a\ln(b)) \\ &\iff b\ln(a) = a\ln(b) \\ &\iff \frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b} \end{aligned}$$

2. Tracer le tableau de variations de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Tracer l'allure de sa courbe.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

   Ainsi, $f'(x) \geq 0 \iff 1 - \ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

3. Montrer que f admet un maximum global.
   Le tableau de variations montre ça (il est atteint en e)
4. (a) Quelles sont les valeurs possibles de a ?
   Pour que $f(a) = f(b)$ avec $a < b$, il faut donc que a soit strictement inférieur à e et b strictement supérieur (cf. tableau de variations) et donc $a = 1$ ou $a = 2$
   (b) Résoudre l'équation $1^b = b^1$
   Cette équation se réécrit $b = 1$, ce qui est en contradiction avec $b > 1$: il n'y a pas de solution non triviale.

(c) Résoudre l'équation $2^b = b^2$
Au vu du tableau de variations, cette équation a une unique solution sur $[e; +\infty[$ et le plus simple est de constater que $b = 4$ convient ! Et c'est un entier !

(d) Conclure en résolvant l'équation initiale.
Il y a donc une seule solution non triviale : $a = 2, b = 4$.

Remarque : c'est un problème **sur les entiers**, avec des inconnues entières et une définition des puissances qui pourrait se cantonner aux définitions du collège, mais qu'on ne résout qu'avec des outils **d'analyse**, c'est-à-dire en généralisant le problème aux nombres **réels** (dérivées, limites, exponentielles ...)