Chapitre 11 : Polynômes

Hors-série

I. Fonctions polynômiales de $\mathbb{R}[x], \mathbb{R}_n[x]$

1. Forme générale, coefficients

Définition 1 (Fonction polynômiale)**.** On appelle polynôme ou fonction polynômiale toute fonction de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$. On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes.

- On suppose $a_n \neq 0$. On appelle n le **degré** du polynôme ($\deg(P)$) et a_n son **coefficient dominant**
- Si tous les coefficients sont nuls, $P = 0$ et on pose $\deg(P) = -\infty$
- On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal à** n

Exemples. $\mathbb{R}_0[x]$ est l'ensemble des fonctions constantes, $\mathbb{R}_1[x]$ des fonctions affines, $\mathbb{R}_2[x]$ des polynômes du second degré (ou affines)

Pour tout polynôme $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $P(0) = \ldots\ldots, P(1) = \ldots\ldots\ldots$

Remarque. On s'autorisera un abus de notation : confondre P et $P(x)$) c'est-à-dire par exemple dire que x^2 est un polynôme.

Exercice. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $P(x) = (x+1)^n - (x-1)^n$
Écrire d'abord ce polynôme sous la forme donnée par la définition

Propriété 2. Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Démonstration.

2. Opérations

Propriété 3. Pour tous polynômes P, Q et toute constante λ,

- λP est un polynôme :
- $P + Q$ est un polynôme :
- PQ est un polynôme :
  Savoir refaire le produit de deux sommes

Exercice. Écrire un programme Python qui prend en argument deux listes `liste_P` qui contient $[a_0, \dots, a_n]$ et `liste_Q` qui contient $[b_0, \dots, b_n]$ et renvoie une liste qui contient les coefficients du polynôme $P + Q$.
♣ Plus difficile : faire de même pour le polynôme PQ.

Propriété 4 (Degré)**.** Soient P, Q des polynômes et $\lambda \neq 0$. Des calculs précédents on déduit :
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$
- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ - égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
  En particulier, $\mathbb{R}_n[x]$ est **stable** par somme et par multiplication par un réel.
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

Propriété 5 (Corollaire : intégrité)**.** Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[x]$,

$$PQ = 0 \Leftrightarrow (P = 0) \text{ ou } (Q = 0)$$

Démonstration.

II. Division euclidienne et factorisation

1. Théorème de division euclidienne

Définition 6 (Divisibilité)**.** Soient $A, B \in \mathbb{R}[x]$. On dit que B **divise** A si :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[x], A = BQ$$

Remarque. Si $B \neq 0$, Q est unique : $\forall B, Q, Q' \in \mathbb{R}[x], B \neq 0 \Rightarrow (BQ = BQ' \Leftrightarrow Q = Q')$

Exemple. $A(x) = x^4 - 1, \quad B(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, cherchons Q

Exercice. On pose $A(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 3$ et $B(x) = x^3 + 2x^2 - 1$. Trouver Q tel que $A = BQ$

♡ **Théorème 7** (division euclidienne)**.** Pour tous polynômes $A, B \in \mathbb{R}[x]$ avec $B \neq 0$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[x]^2$ tels que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

Q et R sont respectivement le **quotient** et le **reste** de la division euclidienne de A par B

Remarque. Analogie avec la division euclidienne des entiers.

Démonstration (De l'unicité). **À compléter :**
Supposons qu'il existe Q_1, Q_2, R_1, R_2 tels que ....
Montrons ....
Par hypothèse, $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$ donc $\deg(R_2 - R_1) =$ .... Si $Q_1 - Q_2 \neq 0$, ceci implique $\deg(R_2 - R_1) \geqslant \deg(B)$. Par ailleurs, $\deg(R_1 - R_2) \leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R_2) < \deg(B)$. La seule solution est $\boxed{Q_1 = Q_2}$. Dans ce cas, $R_2 - R_1 = B \times 0 = 0$ et donc $\boxed{R_2 = R_1}$

Exemple. Calculons le quotient et le reste de la division euclidienne de $x^4 + 3x^2 - x + 2$ par $x^2 - x + 1$
La méthode (algorithmique) de l'exemple nous convainc que quotient et reste existent en effet, on ne le démontrera pas.

♡ *Exercice.* Effectuer la division euclidienne de $A(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 1$ par $B(x) = x^3 - 2$.

2. Racines

a. Premières définitions

Définition 8. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est une **racine du polynôme** P si $P(a) = 0$

Exemples.
- Cas des polynômes de degré 2.

- Trouver des racines évidentes :
  — $P_1(x) = x^7 + 189x^6 - 17x^5 + x^3$
  — $P_2(x) = 5x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

Propriété 9. Tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle (TVI)

b. Factorisation par $(X - a)$

♡ **Propriété 10.** Soient $P \in \mathbb{R}[x], a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a \text{ est racine de } P &\Leftrightarrow (x-a) \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[x], P = (x-a)Q \end{aligned}$$

Démonstration. Remettre les phrases suivantes dans l'ordre :

1. R est une constante, notons-la c
2. Raisonnons par double implication.
3. $\boxed{\Rightarrow}$
4. Puisque $P(a) = 0$, $c = 0$
5. Évaluons P en a : $P(a) = (a-a)Q(a) = 0$
6. D'après le théorème de division euclidienne, il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ et $R \in \mathbb{R}_0[x]$ tels que $P = (x-a)Q + R$
7. Soit P un polynôme et a un réel.
8. Supposons que a est une racine de P
9. Ainsi, a est une racine de P
10. donc $P(x) = (x-a)Q(x)$
11. $\boxed{\Leftarrow}$
12. et donc $(x-a)$ divise P
13. Supposons que $(x-a)$ divise P
14. c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que : $P = (x-a)Q$
15. Évaluons P en a : $P(a) = (a-a)Q(a) + c = c$

c. Nombre de racines

Propriété 11. Soit P un polynôme et $a_1, \ldots, a_n$ racines distinctes de P. Alors, il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$P = (x-a_1)\ldots(x-a_n)Q$$

Démonstration. Par récurrence.

Propriété 12 (Conséquences)**.**
- Si $a_1, \ldots, a_n$ racines de P, alors $\deg(P) \geqslant n$
- Si P est un polynôme de degré n, il admet au plus n racines
- Si P est un polynôme non nul, il admet un nombre fini de racines
- Si P admet une infinité de racines, il est nul

d. Multiplicité d'une racine

Définition 13. Soit P un polynôme, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est une **racine de P de multiplicité** m si :

$$(x-a)^m \text{ divise } P \text{ et } (x-a)^{m+1} \text{ ne divise pas } P$$

c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$P = (x-a)^m Q \text{ et } Q(a) \neq 0$$

Propriété 14 (admise)**.** Soit P un polynôme et $a_1, \ldots, a_k$ des racines de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_k$. Alors, il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que

$$P = \left(\prod_{j=1}^{k} (x-a_j)^{m_j}\right) \times Q$$

Exemple. Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Vérifier que 2 est une racine de P et déterminer sa multiplicité.

♠ e. Relations coefficients-racines

Ce paragraphe n'est pas exigible.

Exemple. Soit $P(x) = x^2 + bx + c$ un polynôme unitaire de degré 2 ayant deux racines x_1, x_2. Alors, $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$. Par identification, $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$

Exercice. Trouver deux nombres dont la somme vaut 5 et le produit -14

Exemple. Soit P de degré 3 unitaire de racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Exprimer a_0, a_1, a_2 en fonction des racines.

Exercice. **Application**. Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -4 \\ x_1x_2x_3 = -4 \end{cases}$$

3. Théorème de factorisation

Définition 15. On dit qu'un polynôme P est **irréductible** si il ne peut pas s'écrire $P = QR$ avec Q, R deux polynômes non constants.
Remarque : c'est l'analogue pour un polynôme des nombres premiers

Théorème 16 (Admis)**.** Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Théorème 17 (admis)**.** Tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[x]$ peut s'écrire comme un produit de polynômes irréductibles, c'est-à-dire formellement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \lambda \prod_{k=1}^{r} (x - a_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + b_jx + c_j)^{n_j}$$

où λ est le coefficient dominant de P, $a_1, \ldots, a_r$ sont les racines distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$ et $b_1, \ldots, b_s, c_1 \ldots, c_s$ vérifient pour tout j : $b_j^2 - 4c_j < 0$.
Cette décomposition (avec des polynômes unitaires) est unique.

♠ *Remarque* (Culturel). Le «vrai» résultat, c'est que tout polynôme de $\mathbb{C}[x]$ s'écrit comme un produit de polynômes de $\mathbb{C}[x]$ de degré 1 : $\mathbb{C}$ est le bon univers dans lequel doivent vivre les polynômes à coefficients réels.

♡ *Exercice.* Factoriser les polynômes suivants :

- $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$
- $Q(x) = x^4 + 5x^2 + 6$
  *On dit que Q est un polynôme **bicarré***

Factoriser (complètement) **un polynôme** c'est l'écrire comme un produit de polynômes irréductibles. Dans notre boîte à outils il y a :

- les racines évidentes ($0, -1, 1, -2, 2$...)
- la division euclidienne par $(x - a)$ où a est une racine
- le discriminant des polynômes de degré 2
- la méthode pour les polynômes bicarrés

Remarque (Encore une remarque culturelle). Factoriser un polynôme quelconque est aussi difficile que de trouver ses racines, c'est-à-dire, pour des polynômes de grand degré, impossible avec une formule fermée (comme notre fameux «$b^2 - 4ac$»). On pourra trouver informatiquement des **valeurs approchées** de l'équation $P(x) = 0$.

III. Dérivations successives

1. Polynôme dérivé

Définition 18. On note P' le polynôme dérivé du polynôme P. Si $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

Si $n \geqslant 1$, P' est un polynôme de degré $n-1$.

2. Dérivées successives

Définition 19. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. On définit par récurrence la $j-me$ dérivée de P, notée $P^{(j)}$ par :

- $P^{(0)} = P$
- $\forall j \in \mathbb{N}, P^{(j+1)} = (P^{(j)})' = (P')^{(j)}$

Remarque. Si $j > \deg(P)$, $P^{(j)} = 0$

Exercice. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Montrer par récurrence que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

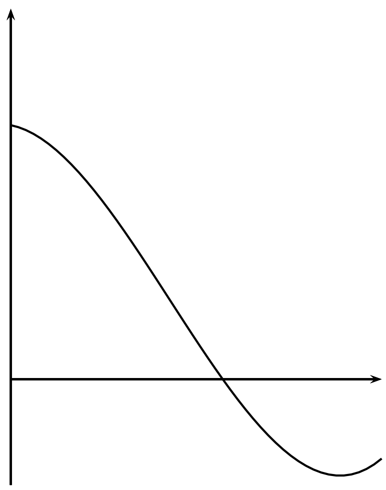
$$P^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} \frac{k!}{(k-j)!} a_k x^{k-j}$$

Que vaut $P^{(j)}(0)$?

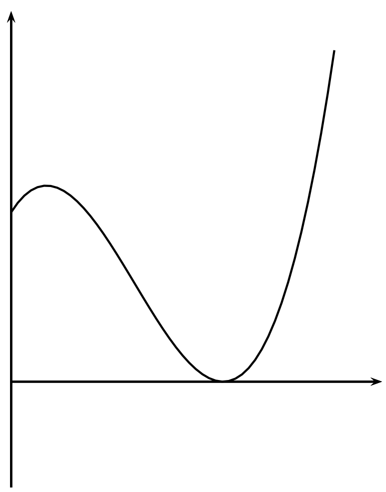
Propriété 20 (lien avec la multiplicité)**.** Soit P un polynôme et a une racine de P de multiplicité m. Alors, m est le plus grand entier tel que a soit racine de $P, P', \ldots, P^{(m)}$

Démonstration.

Illustration :



Racine simple.



Racine double.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme défini par $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ n'a que des racines simples.

Remarque. Bien sûr, les racines de P' ne sont pas toujours des racines de P (trouver un contre-exemple !).

3. Formule de Taylor

Exemple. D'après un exercice précédent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ et donc

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Propriété 21 (Formule de Taylor pour un polynôme)**.** Soit P un polynôme et a un réel quelconque. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Démonstration. Deux démonstrations : calcul et binôme de Newton ou poser $Q = P(x+a)$

Exercice. Exemple : Écrire $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ en fonction de puissances de $(x-2)$.

♠ IV. Décomposition en éléments simples

On n'écrira pas explicitement le théorème de décomposition en éléments simples (vous pouvez chercher en ligne si vous voulez) mais il faut savoir traiter des exemples !

♡ *Exercice* (Rappel des deux méthodes vues jusqu'à présent)*.* On cherche à décomposer la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{2x^5 + x^3 - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

On pose $P(x) = 2x^5 + x^3 - 2$ et $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q pour écrire f sous la forme $R + g$ où R est un polynôme et g une fraction rationnelle dont le degré du dénominateur est plus élevé que le degré du numérateur.
2. Factoriser $Q(x)$
3. On cherche à montrer qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall x \notin \{-1; 1\}, g(x) = \frac{\lambda_1}{(x-1)^2} + \frac{\lambda_2}{(x-1)} + \frac{\lambda_3}{x+1}$$

   Dans la formule horrible précédente, comprendre qui sont les a_k, les m_k et les $\lambda_{k,i}$

   (a) Méthode 1 : en mettant tout au même dénominateur, obtenir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ par identification des coefficients.

   (b) Méthode 2 : Multiplier l'égalité par $(x-1)^2$ et étudier la limite en 1. Utiliser le résultat obtenu pour déterminer λ_1, puis λ_2 et λ_3 par des méthodes similaires.

4. Décomposer de la même manière :

$$\frac{x^6 - x^5 + 3x^4 - x + 6}{(x^2+1)(x-2)}$$