Devoir Maison n°8

Exercice 1 - inspiré d'ESC 2009

1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = x^4 - 4x + 1$$
   (a) Donner la dérivée de h sous une forme factorisée
   h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynômiale) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) = 4(x-1)(x^2+x+1)$
   (b) Étudier les variations de h et ses limites
   D'après la question précédente, h est dérivable et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 \geq 0$ (via discriminant) donc $h'(x) \geq 0 \iff x \geq 1$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

   (c) En déduire que l'équation $(E) : x^4 - 4x + 1 = 0$ admet exactement deux solutions réelles $\alpha < \beta$
   Sur l'intervalle $]-\infty; 1[$, h est continue et strictement décroissante, $h(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ et $h(1) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, 0 admet exactement un antécédent $\alpha \in]-\infty; 1[$. De même 0 admet un antécédent $\beta \in]1; +\infty[$
   (d) Justifier : $\alpha \in]0; 1[$ et $\beta > 1$
   $\alpha < 1$ et $\beta > 1$ ont déjà été justifiés à la question précédente. Montrons donc simplement que $\alpha > 0$ en vérifiant $h(0) > 0$. En effet, $h(0) = 0^4 - 4 \times 0 + 1 = 1 > 1$. Le TVI s'applique donc sur l'intervalle $]0; 1[$ et permet de conclure $\alpha \in]0; 1[$
   (e) Écrire une fonction Python qui prend en argument un nombre réel x et renvoie $h(x)$

```
def h(x):
    return x**4 - 4*x + 1
```

2. On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = \frac{x^4+1}{4}$ et on définit la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et la relation valable pour tout entier n : $u_{n+1} = g(u_n)$
   (a) Étudier les variations de g (on précisera les valeurs aux bornes)
   g est dérivable sur $[0; 1]$ avec pour tout $x \in [0; 1]$, $g'(x) = \frac{4x^3}{4} = x^3 \geq 0$. Ainsi, g est croissante sur $[0; 1]$ avec $g(0) = \frac{1}{4}$ et $g(1) = \frac{1}{2}$
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$
   Initialisation évidente. Pour l'hérédité, simplement appliquer le fait que g est croissante sur $[0; 1]$.
   (c) En déduire que la suite converge puis justifier que : $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$
   Ainsi, (u_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers une limite ℓ et en passant à la limite dans l'inégalité précédente : $0 \leq \ell \leq 1$.
   Par ailleurs, puisque g est continue, on a à la limite $g(\ell) = \ell$ donc $\frac{\ell^4+1}{4} = \ell$ i.e. $\ell^4 + 1 = 4\ell$ i.e. $h(\ell) = 0$. Ainsi, $\ell = \alpha$ ou $\ell = \beta$ et la seule solution dans $[0; 1]$ est $\boxed{\ell = \alpha}$

Exercice 2 - polynômes de Tchebychev

On considère la suite (T_n) de polynômes définie par :
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \end{cases}$$

1. Expliciter T_2, T_3 et T_4.

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) \boxed{= 2x^2 - 1}$$
$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x \boxed{= 4x^3 - 3x}$$
$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) \boxed{= 8x^4 - 8x^2 + 1}$$

2. Déterminer le coefficient dominant et le degré de T_n.
Au vu des résultats précédents, on peut faire la conjecture suivante : $\deg(T_n) = n$ et $CD(T_n) = 2^{n-1}$ (pour $n \geq 1$). Montrons-le par récurrence double.
   (a) Initialisation : pour $n = 1, n = 2$, le résultat se vérifie aisément.
   (b) Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang n **et** au rang $n+1$. Alors, puisque $T_{n+2} = 2xT_{n+1} - T_n(x)$, et que $\deg(T_n) < \deg(T_{n+1})$,
$$\deg(T_{n+2}) = \deg(2x) + \deg(T_{n+1}) = 1 + (n+1) = n+2$$
Par ailleurs, puisque le seul coefficient de degré $n+2$ vient du calcul $2x \times T_{n+1}$, $CD(T_{n+2}) = 2CD(T_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$ et la récurrence est établie.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(nx) = T_n(\cos x)$.
Par récurrence double.
   (a) Pour $n = 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\cos(0x) = 1 = T_0(\cos(x))$ et $\cos(1x) = \cos(x) = T_1(\cos(x))$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$ et $\cos((n+1)x) = T_{n+1}(\cos x)$. Alors :
$$\begin{aligned}\cos((n+2)x) &= \cos((n+1)x + x)\\ &= \cos((n+1)x)\cos(x) - \sin((n+1)x)\sin(x)\end{aligned}$$
Par ailleurs,
$$\begin{aligned}\cos(nx) &= \cos((n+1)x - x)\\ &= \cos((n+1)x)\cos(x) + \sin((n+1)x)\sin(x)\end{aligned}$$
i.e. $\sin((n+1)x)\sin(x) = \cos(nx) - \cos((n+1)x)\cos(x)$ Ainsi,
$$\begin{aligned}\cos((n+2)x) &= \cos((n+1)x)\cos(x) - (\cos(nx) - \cos((n+1)x)\cos(x))\\ &= 2\cos((n+1)x)\cos(x) - \cos(nx)\\ &= 2\cos(x)T_{n+1}(\cos(x)) - T_n(\cos(x)) \text{ par hypothèse de récurrence}\\ &= T_{n+2}(\cos x)\end{aligned}$$
Ainsi, $\cos((n+2)x) = T_{n+2}(\cos x)$ et la récurrence est établie.
On pouvait aussi, dans l'autre sens, partir de la définition de $T_{n+2}(\cos x)$ et remonter les calculs.

4. En déduire que T_n a n racines distinctes, toutes dans $]-1, 1[$.
$$\begin{aligned}\cos(nx) = 0 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, nx = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k}{n}\pi\end{aligned}$$
Or, pour $k = 0, \dots, n-1$ les x de la forme précédente ont des cosinus différents (tous les x sont distincts entre $\frac{\pi}{2n}$ et $\frac{\pi}{2n} + \pi$). Alors, $\{\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k}{n}\right) | k \in [|0; n-1|]\}$ est l'ensemble des racines de T_n et ces nombres sont tous distincts et à valeurs dans $]-1; 1[$ (puisque ce sont des cosinus de nombres qui ne sont pas des multiples de π) : il y a n racines distinctes d'un polynôme de degré n donc ce sont les seules.

5. Factoriser T_n.
D'après la question précédente, T_n a n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et le coefficient dominant de T_n est 2^n donc :
$$T_n = 2^n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k)$$

6. Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (1-x^2)T_n^{(2)}(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$$

Sans récurrence : on note $\phi_n = T_n \circ \cos$ et d'après la question 3, $\phi_n(x) = \cos(nx)$. Les deux membres de l'égalité sont des fonctions deux fois dérivables et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi_n'(x) = -\sin(x)T_n'(\cos(x)) = -n\sin(nx)$$

puis :

$$\phi_n''(x) = \sin^2(x)T_n''(\cos(x)) - \cos(x)T_n'(\cos(x)) = -n^2\cos(nx)$$

On obtient donc :

$$\sin^2(x)T_n''(\cos(x)) - \cos(x)T_n'(\cos(x)) + n^2 T_n(\cos(x)) = 0$$

Puisque $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, on retrouve quasiment la formule voulue, mais seulement pour les nombres de la forme $\cos(x)$. Puisque $x\cos(x)$ prend une infinité de valeurs, le polynôme $(1-x^2)T_n^{(2)} - xT_n' + n^2T_n$ a une infinité de racines et est donc nul. Ainsi pour tout réel x,

$$(1-x^2)T_n^{(2)}(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$