Feuilles d'exercices n 11

Exercice 1. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1. $P(x) = 3x^3 + x^2 - 5x + 1$
   P est de degré 3 et a un coeff. dominant de 3
2. $Q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
   Q est de degré 5 et a un coefficient dominant de 1. On dit que Q est **unitaire**.
3. $R(x) = \sum_{k=0}^{3} (-k)x^k$
   R est de degré 3 et a un coefficient dominant de -3
4. PQ
   PQ est de degré 8 et a un coefficient dominant de 3. Les coefficients dominants se **multiplient** alors que les degrés **s'ajoutent**.
5. $P + Q$
   P et Q sont de degrés différents, et dans ce cas le degré de la somme c'est le maximum des deux degrés, ici $P + Q$ est de degré 5
6. $P + R$
   P et R ont le même degré, et ici leurs coefficients dominants se compensent. En revanche, en degré 2, il y a un coefficient de 1 dans P et de -2 dans R. Ainsi, $P + R$ est de degré 2 et son coefficient dominant est $1 - 2 = -1$
7. $S(x) = \prod_{k=1}^{n} (\frac{x}{2} + k)^k$
   Comme écrit dans la question 4, dans un produit, les degrés s'ajoutent et les coefficients dominants se multiplient. Le degré de S est donc $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et le coefficient dominant de S est

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Exercice 3 (Un produit)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer en regroupant les termes par degré le produit des polynômes : $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$ et $Q(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \ldots + 1$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \text{ et } Q(x) = \sum_{j=0}^{n} (-x)^j$$

Alors,

$$\begin{aligned}
(PQ)(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} (-x)^j\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^{k+j} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n+k} (-1)^{p-k} x^p \text{ en posant } p = j + k \\
&= \sum_{p=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{0 \le k \le n \\ p-n \le k \le p}} (-1)^{p-k}\right) x^p
\end{aligned}$$

La somme des puissances de -1 est géométrique, mais il faut bien comprendre de combien à combien elle va. Si $p \ge n$, les contraintes importantes sont $p - n \le k \le n$, alors que si $p \le n$, les contraintes importantes

sont $0 \leq k \leq p$. Dans le premier cas :

$$\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ p-n\leq k\leq p}} (-1)^{p-k} = \sum_{j=p-n}^{n} (-1)^j = (-1)^{p-n}\frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1}{2}\left((-1)^{p-n} - (-1)^{p+1}\right)$$

Dans le deuxième cas :

$$\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ p-n\leq k\leq p}} (-1)^{p-k} = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j = \frac{1-(-1)^{p+1}}{1-(-1)} = \frac{1}{2}\left((-1)^p + 1\right)$$

Exercice 12 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 - cas racine double)**.** Soit $P(x) = x^2 - ax - b$ un polynôme ayant une racine double γ. Montrer que la suite $(n\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation d'inconnue $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0$$

Comme pour les racines simples, on ne montrera - au premier semestre au moins - pas que ce sont les seules solutions.

γ vérifie les deux équations : $\gamma^2 = a\gamma + b$ et $P'(\gamma) = 0$ i.e. $2\gamma = a$

On pose $u_n = n\gamma^n$ pour tout n. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}
au_{n+1} + bu_n &= a(n+1)\gamma^{n+1} + bn\gamma^n \\
&= \gamma^n\left(a(n+1)\gamma + bn\right) \\
&= \gamma^n\left(an\gamma + a\gamma + bn\right) \\
&= \gamma^n\left(2\times\gamma\times\gamma + n\gamma^2\right) \\
&= \gamma^n \times (n+2)\gamma^2 \\
&= (n+2)\gamma^{n+2} \\
&= u_{n+2}
\end{aligned}$$

Exercice 13 (Rolle itéré)**.** Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ de degré n ayant n racines réelles distinctes.

1. Démontrer que P' a $n-1$ racines réelles distinctes.
   Notons $a_1 < \ldots < a_n$ les n racines de P rangées dans l'ordre croissant. Pour chaque $i \in [|1; n-1|]$, $a_i < a_{i+1}$ et $P(a_i) = P_(a_{i+1})$, P est dérivable sur $[a_i; a_{i+1}]$ donc par théorème de Rolle il existe b_i tel que $P'(b_i) = 0$. $b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1}$ sont $n-1$ racines distinctes de P'
2. Que dire du polynôme $P^{(k)}$?
   Pour $k < n$, puisque P est k fois dérivable, on a par récurrence immédiate $n-k$ racines distinctes du polynôme $P^{(k)}$
3. Reprendre les questions si l'on suppose simplement que P a n racines (pas nécessairement distinctes).
   On garde la même conclusion. En effet, si il y a par exemple p racines multiples et $n-p$ racines simples, il y a $n-p-1$ racines de P', et p racines données par les racines multiples, soit finalement $n-1$ racines au total, ce qui généralise le résultat démontré ici.