Devoir Maison n°9

On s'intéresse, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, à l'équation d'inconnue réelle x suivante :

$$(E_n) : \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} = a$$

On introduit ainsi la fonction $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - a = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+2n} - a$

1. **Un cas particulier** On prend ici $n = 1$ et $a = \frac{11}{6}$.
   (a) Donner le domaine de définition de f_1, sa dérivée et ses variations.
   $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{11}{6}$ est définie sur $E = \mathbb{R}\backslash\{0; -1; -2\}$ et elle est définie sur cet ensemble avec pour tout $x \in E$,
   $$f_1'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} < 0$$
   Ainsi, f_1 est strictement décroissante sur chacun des 4 intervalles de son domaine de définition. Elle tend vers $+\infty$ et $-\infty$ à droite et à gauche de $0, -1, -2$ et vers $-\frac{11}{6}$ en $\pm\infty$
   (b) Tracer l'allure du graphe de f_1.
   (c) Montrer que résoudre l'équation (E_1) revient à trouver les racines du polynôme $11x^3 + 15x^2 - 14x - 12$.
   $$\begin{aligned}(E_1) &\iff \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{11}{6} \\ &\iff \frac{6(x+1)(x+2) + 6x(x+2) + 6x(x+1) - 11x(x+1)(x+2)}{6x(x+1)(x+2)} = 0 \\ &\iff 6(x^2+3x+2) + 6(x^2+2x) + 6(x^2+x) - 11(x^3+3x^2+2x) = 0 \\ &\iff -11x^3 - 15x^2 + 14x + 12 = 0 \\ &\iff 11x^3 + 15x^2 - 14x - 12 = 0\end{aligned}$$
   (d) Calculer $f_1(1)$, et résoudre l'équation (E_1)
   $f_1(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{11}{6} = \frac{11}{6} - \frac{11}{6} = 0$ 1 est une solution de (E_1)/une racine de $11x^3 + 15x^2 - 14x - 12$. Le polynôme est divisible par $x - 1$:
   $$11x^3 + 15x^2 - 14x - 12 = (x-1)(11x^2 + 26x + 12)$$
   Le quotient a un discriminant $\Delta = 26^2 - 4 \times 12 \times 11 = 676 - 528 = 148 > 0$ Il y a donc deux autres racines :
   $$\frac{-26 \pm \sqrt{148}}{22} = \frac{-13 \pm \sqrt{38}}{11}$$

2. **Dénombrement des solutions de** (E_n)
   (a) Dresser le tableau de variations de f_n (attention à son domaine de définition !).
   f_n est définie sur $\mathbb{R}$ privé de $0, -1, \ldots, -2n$ et comme dans la première question, strictement décroissante sur chaque intervalle de cet ensemble. Limites à droite $+\infty$ et à gauche $-\infty$ en chaque entier. $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -a$ et $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -a$
   (b) En déduire le nombre de solutions à l'équation (E_n)
   Par TVI et stricte décroissance : une solution sur chaque intervalle entre deux entiers $(]-2n; -2n+1[, \ldots,]-1; 0[)$ soit $2n$ solutions, et une solution sur $]0; +\infty[$, soit $2n+1$ solutions en tout.

3. **Étude d'une suite** On note x_n la plus grande racine de (E_n)
   (a) Justifier que pour tout entier n, $x_n > 0$
   cf. question précédente.
   (b) Montrer pour tout réel $y > 1$:
   $$\frac{1}{y} < \ln\left(\frac{y}{y-1}\right) < \frac{1}{y-1}$$
   On pose $f : y \mapsto \ln(y-1)$. f est dérivable sur $]1; +\infty[$ donc dérivable sur $[y; y+1]$ pour tout $y > 1$. Pour tout $t \in [y; y+1]$,
   $$f'(t) = \frac{1}{t-1}$$

Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t-1}$,

$$\frac{1}{y+1-1} \leq f'(t) \leq \frac{1}{y-1}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc :

$$\frac{1}{y} \leq f(y+1) - f(y) \leq \frac{1}{y-1}$$

ie

$$\frac{1}{y} \leq \ln(y) - \ln(y-1) \leq \frac{1}{y-1}$$

et finalement :

$$\frac{1}{y} \leq \ln\left(\frac{y}{y-1}\right) \leq \frac{1}{y-1}$$

(c) En sommant cet encadrement pour certaines valeurs bien choisies de y, en déduire que pour tout réel $x > 0$, $f_n(x) - \frac{1}{x} + a < \ln\left(1 + \frac{2n}{x}\right) < f_n(x) - \frac{1}{x+2n} + a$.

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + a = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x+k} \leq \sum_{k=1}^{2n} \ln(x+k) - \ln(x+k-1) = \ln(x+2n) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+2n}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{2n}{x}\right)$$

D'autre part,

$$f_n(x) - \frac{1}{x+2n} + a = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{x+k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x+k-1} \geq \sum_{k=1}^{2n} \ln(x+k) - \ln(x+k-1) = \ln\left(1 + \frac{2n}{x}\right)$$

d'où les deux inégalités annoncées.

(d) En déduire que, pour tout entier n, $a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n+2n}$.

On applique les inégalités précédentes à x_n (puisque $x_n > 0$) :

$$f_n(x_n) - \frac{1}{x_n} + a \leq \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) \leq f_n(x_n) - \frac{1}{x_n + 2n} + a$$

On conclut simplement avec $f_n(x_n) = 0$

(e) Montrer que pour tout entier n, $x_n > \frac{2n}{e^a - 1}$

Puisque $x_n + 2n > 0$, $a - \frac{1}{2n+x_n} \leq a$ d'où :

$$\ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) \leq a$$

En passant à l'exponentielle (croissante) :

$$1 + \frac{2n}{x_n} \leq e^a$$

Et on conclut en soustrayant 1 et en divisant par $2n$ (strictement positif) :

$$x_n \geq \frac{2n}{e^a - 1}$$

(f) Quelles sont les limites de x_n et de $\ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right)$ quand $n \to +\infty$?

D'après l'inégalité précédente, puisque $2n \to +\infty$ et $e^a - 1$ constante, $x_n \to +\infty$. Alors, $\frac{1}{x_n}$ et $\frac{1}{x_n+2n}$ tendent vers 0 et par théorème des gendarmes $\ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) \to a$.

(g) En déduire la limite de $\frac{x_n}{n}$ quand $n \to +\infty$

On en déduit alors que $1 + \frac{2n}{x_n} \to e^a$ et donc $\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{2}{e^a - 1}$