Théorème fondamental de l'analyse - démonstration

Soit I un intervalle, f une fonction continue sur I et $a \in I$. On définit :

$$F : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)dt \end{array}$$

F est une fonction définie sur I de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $F' = f$.
On dit que c'est **une primitive** de f.

Démonstration

Domaine de définition

Pour tout $x \in I$, le segment $[x;a]$ ou $[a;x]$ est inclus dans I et f est une fonction continue sur ce segment. L'intégrale de f de a à x est ainsi bien définie.

Dérivabilité

Soit $x \in I$. Montrons que F est dérivable en x et que $F'(x) = f(x)$, c'est-à-dire :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$$

On cherche alors à majorer pour $h > 0$:

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right|$$

D'après la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

On écrit également :

$$f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt$$

Ainsi :

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))dt\right| \tag{1}$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|dt \text{ (inégalité triangulaire)} \tag{2}$$

On cherche donc à majorer pour $t \in [x;x+h]$ la quantité $|f(t)-f(x)|$. Comme f est continue en x, posons $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ un réel tel que

$$\forall t \in [x-\alpha; x+\alpha] \cap I, |f(t)-f(x)| \leq \varepsilon$$

Si $h < \alpha$, on a alors pour tout $t \in [x;x+h]$, $|f(t)-f(x)| \leq \varepsilon$ et donc :

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon dt = \frac{1}{h}(h\varepsilon) = \varepsilon$$

On a ainsi montré :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall h \in]0;\alpha[, \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \varepsilon}$$

Ceci nous donne la limite à droite en x. On peut reprendre les calculs à partir de 2 pour $h < 0$ (inégalité triangulaire inversée et multiplication par h qui ré-inverse l'inégalité) pour montrer l'autre côté.

Qu'en retenir ?

1. Le théorème ! Avec toutes ses hypothèses
2. Le dessin fait en classe, qui doit servir de support à la lecture de la démonstration et d'explication «intuitive»
3. L'astuce «écrire f comme une intégrale constante»
4. Pour des élèves plus à l'aise, les détails techniques qui illustrent les différentes propriétés de l'intégrale
5. La démonstration n'est pas exigible, ni pour nous ni dans le programme d'ECG.