# Feuilles d'exercices n°14

**Exercice 2.** Déterminer, pour chaque intervalle sur lequel elle est définie, une primitive de la fonction $f$ définie par :

1. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^3+1}$
   On reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$. Une primitive sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ est $x \mapsto \ln|x^3+1|$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$
   On reconnaît une forme $u' \times \frac{1}{1+u^2}$. Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \arctan(\ln x)$
3. $f(x) = \sin x \cos x$
   On reconnaît une forme $-u' \times u$ ou $u \times u'$ (deux idées similaires). Une primitive sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\sin^2(x)$
4. $f(x) = \dfrac{\ln(x)+1}{x}$
   On reconnaît une forme $u' \times u$. Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x + 1)^2$
5. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{2}$
   Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto 4\sqrt{x} - \sqrt{2}\frac{x^2}{2}$
6. $f(x) = \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{x^2}{4}$
   Une primitive sur $\mathbb{R}^*$ est $x \mapsto -\frac{4}{x} + \frac{x^3}{12}$

**Exercice 3** (Équation différentielle)**.** On pose $g \in \mathcal{C}^0(I)$ et $G$ une primitive de $g$ sur $I$. L'enjeu est de trouver l'ensemble des fonctions dérivables vérifiant $f' = f \times g$. On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse : Soit $f$ une solution du problème. On pose $C : x \mapsto f(x)e^{-G(x)}$. $C$ est une fonction dérivable par composition et pour tout $x \in I$,

$$C'(x) = f'(x)e^{-G(x)} + f(x) \times (-G'(x))e^{-G(x)} = (f(x)g(x) - f(x)g(x))\, e^{-G(x)} = 0$$

Ainsi, $C' = 0$ sur un intervalle, donc $C$ est constante. On note alors $\lambda$ le réel égal à $C$ pour tout $x$. On en déduit :

$$f(x)e^{-G(x)} = \lambda \quad \text{i.e.} \quad f(x) = \lambda e^{G(x)}$$

Synthèse : Réciproquement, posons $\lambda$ un réel et $f : x \mapsto \lambda e^{G(x)}$. $f$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \lambda G'(x)e^{G(x)} = \lambda g(x)e^{G(x)} = g(x)f(x)$$

Ainsi, $f$ vérifie bien $f' = fg$
Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f' = f \times g$ est $\{x \mapsto \lambda e^{G(x)} | \lambda \in \mathbb{R}\}$

**Exercice 6** (IPP)**.** Calculer les intégrales suivantes pour $x \in \mathbb{R}$ :
*Vérifier que les fonctions utilisées sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$*

1. $\int_1^e t^2 \ln(t)dt$
   Intégrons par parties en dérivant la fonction ln et en primitivant $t^2$ :

$$\int_1^e t^2 \ln(t)dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^3}{3} \times \frac{1}{t}dt = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

2. $\int_1^e t^n \ln(t)dt$
   De la même façon,

$$\int_1^e t^n \ln(t)dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{t} = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^e = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

3. $\int_1^x (\ln t)^2 dt$
Primitivons 1 et dérivons $\ln(t)^2$ :

$$\begin{aligned}\int_1^x (\ln t)^2 dt &= \left[t \times (\ln t)^2\right]_1^x - \int_1^x t \times 2 \times \frac{1}{t} \times \ln(t) dt \\ &= x\ln(x)^2 - \int_1^x 2\ln(t) dt \\ &= x\ln(x)^2 - 2\left[t\ln(t) - t\right]_1^x \\ &= x\ln(x)^2 - 2x\ln(x) + 2x - 2\end{aligned}$$

4. $\int_1^x \sin(\ln t) dt$
Tout pareil.

$$\begin{aligned}\int_1^x \sin(\ln t) dt &= \left[t\sin(\ln t)\right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} \times \cos(\ln t) dt \\ &= x\sin(\ln x) - \int_1^x \cos(\ln t) dt \\ &= x\sin(\ln x) - \left[t\cos(\ln t)\right]_1^x + \int_1^x t \times \frac{1}{t} \times (-\sin(\ln t)) dt \\ &= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + 1 - \int_1^x \sin(\ln t) dt\end{aligned}$$

On obtient une équation avec $\int_1^x \sin(\ln t) dt$ des deux côtés qui se simplifie :

$$\int_1^x \sin(\ln t) dt = \frac{1}{2}\left(x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + 1\right)$$

5. $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt &= \left[\ln(1+t) \times \left(-\frac{1}{t}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{1+t} \times \left(-\frac{1}{t}\right) dt \\ &= \ln(2) - \frac{\ln(3)}{2} + \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)} dt \\ &= \ln(2) - \frac{\ln(3)}{2} + \int_1^2 \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} dt \\ &= \ln(2) - \frac{\ln(3)}{2} + \left[\ln(t) - \ln(1+t)\right]_1^2 \\ &= \ln(2) - \frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) - \ln(3) + \ln(2) \\ &= 3\ln(2) - \frac{3\ln(3)}{2}\end{aligned}$$

6. $\int_0^\pi \sin(t) e^t dt$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(t) e^t dt &= \left[\sin(t) e^t\right]_0^\pi - \int_0^\pi (\cos t) e^t dt \\ &= -\int_0^\pi \cos(t) e^t dt \\ &= -\left[\cos(t) e^t\right]_0^\pi + \int_0^\pi (-\sin(t)) e^t dt \\ &= e^\pi + 1 - \int_0^\pi \sin(t) e^t dt\end{aligned}$$

Comme dans le 4., on en déduit :

$$\int_0^{\pi} \sin(t)e^t dt = \frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$$

*Pour certaines de ces intégrales, on pourra faire* ***deux*** *intégrations par partie successives.*

**Exercice 7.** En intégrant par parties, calculer

$$\int_0^1 t(\arctan t)^2 dt$$

*Indication : on pourra utiliser* $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$
On primitive $t$ et on dérive $\arctan^2(t)$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t\arctan(t)^2 dt &= \left[\frac{t^2}{2}\times\arctan(t)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2}\times 2\frac{1}{1+t^2}\times\arctan(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{\pi^2}{16} - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\arctan(t)dt \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\arctan(t)dt \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \arctan(t)dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\arctan(t)dt \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \left([t\arctan(t)]_0^1 - \int_0^1 t\times\frac{1}{1+t^2}dt\right) + \left[\frac{\arctan(t)^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt + \frac{\pi^2}{32} \\
&= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \ln(2)
\end{aligned}$$

**Exercice 11** (Valeur moyenne d'une fonction)**.** Si $a < b$ et $f$ est continue sur le segment $[a;b]$, on appelle **valeur moyenne** de $f$ la quantité $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

1. Interpréter ce nom de valeur moyenne
   Si $f$ était constante égale à un réel $\mu$, alors on aurait $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mu = (b-a)\mu$ ie $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.
   Par ailleurs, il y a une analogie (répétée plusieurs fois en cours) entre l'intégrale et le processus de sommation : on prend toutes les valeurs prises par $f$ avec un petit $dt$, et on divise par la largeur totale de l'intervalle - comme sommer toutes les valeurs et diviser par le nombre de valeurs. Tracer sur un dessin la fonction constante égale à $\mu$ pour visualiser (en quoi c'est la moyenne + la propriété de la question suivante).
2. Soient $m$ et $M$ deux réels tels que pour tout $x \in [a,b], m \leq f(x) \leq M$, montrer, après avoir justifié l'existence de $m$ et $M$ , que $m \leq \mu \leq M$.
   Pour tout $x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$ donc par croissance de l'intégrale :

   $$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b M dt$$

   i.e.

   $$(b-a)m \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)M$$

   En divisant par le réel strictement positif $b-a$, on obtient : $m \leq \mu \leq M$

**Exercice 14** (Lemme de Riemann-Lebesgue et intégration par parties)**.** Montrer que si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Puisque $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{n}\cos(nt)$ aussi, on peut intégrer par parties :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = \left[f(t) \times \left(-\frac{1}{n}\sin(nt)\right)\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)dt$$

Or, $\left|\int_a^b f'(t)\cos(nt)dt\right| \leq \int_a^b |f'(t)\cos(nt)|dt \leq \int_a^b |f'(t)|dt$ qui est une constante donc $\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)dt$ tend vers 0 et il en va de même pour les termes de bord $\frac{1}{n}f(a)\sin(na)$ et $\frac{1}{n}f(b)\sin(nb)$. On en déduit que l'intégrale tend vers 0.
Sur un dessin : de plus en plus d'oscillations qui se compensent localement.

**Exercice 15.** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

1. En effectuant le changement de variable défini par $t = \sin x$, déterminer $u_0$.
   $u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)}dx$. En suivant l'énoncé, posons $t = \sin x$. Alors, quand $x = 0, t = 0$, quand $x = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et $dt = \cos(x)dx$. Faisons apparaître $\cos(x)dx$ :

$$u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{\cos^2(x)}$$

   En utilisant $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ :

$$\begin{aligned}
u_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)dx}{1-\sin^2(x)} \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(1-t) + \ln(1+t)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{car } 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{3}{4}\right) \\
&= -\frac{\ln(4)}{2} \\
&= -\frac{\ln(2^2)}{2} \\
&= -\ln(2)
\end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq (\frac{\sqrt{3}}{2})^n \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.
   Pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$, par croissance de la fonction sinus sur cet intervalle :

$$0 \leq \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Puis en mettant à la puissance $n$, par croissance de $x \mapsto x^n$ :

$$0 \leq \sin(x)^n \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Puisque $\cos(x) > 0$ pour $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$,

$$0 \leq \frac{\sin(x)^n}{\cos(x)} \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \times \frac{1}{\cos(x)}$$

Par croissance de l'intégrale, et en utilisant la linéarité :

$$0 \leq u_n \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)} dx = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n u_0$$

3. Déterminer la convergence de la suite $(u_n)$.
   D'après la question précédente, puisque $0 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n u_0 \to 0$ et par théorème des gendarmes $u_n \to 0$