Devoir Maison n°10 - Une chaîne de Markov (EDHEC 2017 ECE)

Modèle : Les sommets d'un carré sont numérotés $1, 2, 3, 4$. Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré, selon le protocole suivant :

— À l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1

— Lorsque le mobile est sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un des trois autres sommets de façon équiprobable.

Pour tout entier n, on note X_n le numéro du sommet auquel se situe le mobile à l'instant n. Ainsi, $X_0 = 1$.

Étude des variables aléatoires X_n

1. Donner la loi de X_1 et son espérance.
   $X_1(\Omega) = \{2, 3, 4\}$ puisque $X_0 = 1$ et que le mobile se déplace à chaque étape. Par ailleurs, X_1 suit une loi uniforme sur $\{2; 3; 4\}$ et :
   $$E(X_1) = \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times 4 = \frac{1}{3}(2 + 3 + 4) = \frac{1}{3} \times 9 = 3$$

2. Soit $n \geq 2$. Donner l'ensemble des valeurs prises par X_n, en justifiant.
   À partir de $n = 2$, $X_n(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\}$. Pour $n = 2$, ça se justifie avec au moins une trajectoire possible pour chacune des valeurs : $1 - 2 - 1$, $1 - 3 - 2$, $1 - 2 - 3$, $1 - 2 - 4$ par exemple. On peut ensuite justifier par récurrence immédiate.

3. (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$:
   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\left(\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) + \mathbb{P}(X_n = 4)\right)$$
   Soit $n \geq 2$. Utilisons la formule des probas totales sur le système complet d'événements associé à X_n : $(X_n = 1, X_n = 2, X_n = 3, X_n = 4)$. On obtient :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2)\mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)\\ &\quad + \mathbb{P}(X_n = 3)\mathbb{P}_{X_n=3}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 4)\mathbb{P}_{X_n=4}(X_{n+1} = 1)\end{aligned}$$
   Or, $\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = 0$ et les autres probas conditionnelles sont de $\frac{1}{3}$ (d'après l'énoncé «l'un des trois autres sommets de façon équiprobable»). On obtient donc :
   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\left(\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) + \mathbb{P}(X_n = 4)\right)$$

   (b) Vérifier que la relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$
   Pour $n = 0$, c'est vrai avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 0$ et $\mathbb{P}(X_0 = 2) = \mathbb{P}(X_0 = 3) = \mathbb{P}(X_0 = 4) = 0$. Pour $n = 1$, c'est vrai aussi, avec le même raisonnement et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$, ce qui ne change rien au calcul.

   (c) En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$
   Puisque $(X_n = 1, X_n = 2, X_n = 3, X_n = 4)$ est un système complet d'événements, $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - (\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) + \mathbb{P}(X_n = 4))$. On réinjecte cette égalité dans l'égalité de la question $3.a$:
   $$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\left(1 - \mathbb{P}(X_n = 1)\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 1)$$

   (d) En déduire le terme général de la suite $(\mathbb{P}(X_n = 1))$
   $(\mathbb{P}(X_n = 1))$ est donc une suite arithmético-géométrique de raison $\left(-\frac{1}{3}\right)$ et de terme général :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = 1) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(\mathbb{P}(X_0 = 1) - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

4. Adapter les questions précédentes pour déterminer une expression explicite de $\mathbb{P}(X_n = 2)$
   On reprend la question $3a$: avec le même raisonnement pour $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\left(\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 3) + \mathbb{P}(X_n = 4)\right) = \frac{1}{3}(1 - \mathbb{P}(X_n = 2))$$

   On vérifie encore que la propriété est vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(\mathbb{P}(X_0 = 2) - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

On admet que $\mathbb{P}(X_n = 3) = \mathbb{P}(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

5. Déterminer pour tout entier n l'espérance de la variable aléatoire X_n
   Pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \mathbb{P}(X_n = 1) + 2\mathbb{P}(X_n = 2) + 3\mathbb{P}(X_n = 3) + 4\mathbb{P}(X_n = 4) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 9\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Calcul des puissances d'une matrice

A. Avec la partie précédente

On pose pour tout entier n la matrice $U \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) & \mathbb{P}(X_n = 2) & \mathbb{P}(X_n = 3) & \mathbb{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$$

On pose $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n A$
   C'est une reformulation de la question $3a$ (et de ses équivalents pour $\mathbb{P}(X_n = 2), \mathbb{P}(X_n = 3), \mathbb{P}(X_n = 4)$.
2. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 A^n$$

   Par récurrence.
   Initialisation : $U_0 = U_0 \times I_4$
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n = U_0 A^n$.
   Alors,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n A \text{ d'après la question précédente} \\ &= (U_0 A^n)\, A \\ &= U_0 \times A^{n+1} \end{aligned}$$

   et la récurrence est établie.
3. En déduire la première ligne de A^n
   La partie précédente nous donne la loi de X_n donc une expression explicite de U_n. On en déduit la première ligne de A^n :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

B. Une méthode indépendante de calcul de A^n

On considère $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer deux réels a, b tels que $A = aI_4 + bJ$
   On trouve : $A = \frac{1}{3}(J - I_4)$ ($a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$)
2. Montrer que pour tout $k \neq 0$, $J^k = 4^{k-1}J$
   Par récurrence. On trouve $J_2 = 4J$ et on écrit dans l'hérédité : $J^{k+1} = J^k \times J = 4^{k-1}J \times J = 4^{k-1} \times J^2 = 4^{k-1} \times 4J = 4^k J$
3. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer une expression de A^n en fonction de I et J
   $IJ = JI = I$ donc on peut utiliser la formule et écrire pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}J^k \\ &= \frac{1}{3^n}(-1)^n\left(I_4 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 4^{k-1}J\right) \\ &= (-\frac{1}{3})^n I_4 + (-\frac{1}{3})^n \frac{1}{4}\left((1-4)^n - 1\right)J \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(I_4 + \frac{1}{4}((-3)^n - 1)J\right) \end{aligned}$$

4. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$
   Pour $n = 0$, $A^0 = I_4$ et $(-\frac{1}{3})^0 = 1$, $I_4 + \frac{1}{4}(5^0 - 1)J = I_4 + \frac{1}{4} \times 0J = I_4$. La formule reste valable.