Feuilles d'exercices n°15

Exercice 2. Pour les ensembles suivants, montrer que ce sont des sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel de référence bien choisi. On pose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice.

1. $C_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | AM = MA\}$
   $C_A \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
   — Quelle que soit la matrice A, $A \times 0_n = 0_n \times A$. Ainsi, $0_n \in C_A$.
   — Soient $M, N \in C_A$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons : $\lambda M + \mu N \in C_A$:
   $$\begin{aligned} A(\lambda M + \mu N) &= \lambda AM + \mu AN \text{ par opérations matricielles} \\ &= \lambda MA + \mu NA \text{ car } M, N \in C_A \\ &= (\lambda M + \mu N)A \end{aligned}$$
   Ainsi, $\lambda M + \mu N \in C_A$.
   Remarque : C_A est le «commutant» de la matrice A : l'ensemble des matrices qui commutent avec elle.
2. L'ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$
   S'inspirer de l'exemple des suites bornées fait en cours.
3. L'ensemble des polynômes P tels que $P(0) = 0$
   — Le polynôme nul vérifie $P(0) = 0$ donc il est dans l'ensemble.
   — Soient P, Q deux polynômes tels que $P(0) = Q(0) = 0$ et λ, μ deux réels. Alors,
   $$(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$$
4. L'ensemble des polynômes divisibles par $x^2 - 1$
   — Le polynôme nul est égal à $0 \times (x^2 - 1)$ donc est divisible par $x^2 - 1$
   — Soient P_1, P_2 respectivement égaux à $(x^2 - 1)Q_1$ et $(x^2 - 1)Q_2$ avec $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[x]$ et λ, μ deux réels. Alors,
   $$\lambda P_1 + \mu P_2 = \lambda(x^2 - 1)Q_1 + \mu(x^2 - 1)Q_2 = (x^2 - 1)\left(\lambda Q_1 + \mu Q_2\right)$$

Exercice 4. Soit F l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
   cf. cours : on montre que c'est un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   $F, G \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De plus, la fonction nulle est constante et vérifie bien $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Une combinaison linéaire de constantes est constante. Si f, g sont dans G et λ, μ sont deux réels :
   $$\int_0^1 (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_0^1 f(t)dt + \mu \int_0^1 g(t)dt = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$$
3. Montrer que F et G sont en somme directe.
   Montrons $F \cap G = \{0\}$. Soit $f \in F \cap G$. Alors puisque $f \in$, il existe un réel c tel que $f = c$. Puisque $f \in G$, $\int_0^1 f(t)dt = 0$ i.e. $\int_0^1 cdt = c \times 1 = 0$ donc $c = 0$ et $f = 0$. On a bien montré $F \cap G = \{0\}$

Exercice 5.

Quels sont les réels m tels que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire des matrices $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$?

$\begin{pmatrix}3\\1\\m\end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de U_1 et U_2 si et seulement si l'équation $\begin{pmatrix}3\\1\\m\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ d'inconnues a, b admet au moins une solution. Réécrivons-la sous forme d'un système :

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 3a - b = 1 \\ 2a + 4b = m \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} a + b = 3 \\ -4b = -8 \\ 2b = m-6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = 3 \\ b = 2 \\ 2b = m-6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = 3 \\ b = 2 \\ 4 = m-6 \end{cases}$$

La dernière équation a une solution si et seulement si $m = 10$. On en conclut : $\begin{pmatrix}3\\1\\m\end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(U_1, U_2)$ ssi. $m = 10$

Exercice 7 (Rang)**.** Soit $E = \mathbb{R}^3$. Les familles suivantes sont-elles libres ? Si non, extraire une sous-famille libre avec le plus de vecteurs possibles. Indiquer le nombre de vecteurs de leur plus grande sous-famille libre.

1. $\mathcal{F}_1 = ((2,0,3),(1,7,2))$
   Il n'y a que deux vecteurs : la famille est libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires (coefficients proportionnels)
2. $\mathcal{F}_2 = ((1,2,3),(0,1,2),(0,0,6),(0,2,1))$
   On trouve : $(0,2,1) = 2(0,1,2) - \frac{1}{2}(0,0,6)$ (par exemple). Donc la famille $\mathcal{F}_2$ n'est pas libre. En revanche, $((1,2,3),(0,1,2),(0,0,6))$ est une famille libre *cf. méthode : poser le système.*
   Ainsi, la plus grande sous-famille libre de $\mathcal{F}_2$ a 3 vecteurs.
3. $\mathcal{F}_3 = ((-5,-2,1),(0,1,4),(-5,0,9))$
   De même, ici, $(-5,0,9) = (-5,-2,1) + 2(0,1,4)$ donc la famille est liée. En revanche, $(-5,-2,1)$ et $(0,1,4)$ sont non colinéaires : la plus grande sous-famille libre de $\mathcal{F}_3$ a 2 vecteurs.

Exercice 8 (Familles libres de polynômes)**.** On considère les polynômes :

- $P_1 = X^3 - 2X + 1$
- $P_2 = X^2$
- $P_3 = X^3 - X^2 + X$
- $P_4 = 2X^3 + 2X^2 - 7X + 3$

La famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}[X]$?

Essayons de montrer que la famille est libre. Comme ce qu'on a fait au brouillon en classe : si le système obtenu a plusieurs solutions, il nous donnera gratuitement une relation de liaison entre $P_1, \ldots, P_4$. Soit donc $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$a(X^3 - 2X + 1) + bX^2 + c(X^3 - X^2 + X) + d(2X^3 + 2X^2 - 7x + 3) = 0$$

En regroupant par degré :

$$(a + c + 2d)X^3 + (b - c + 2d)X^2 + (-2a + c - 7d)X + (a + 3d) = 0$$

donc :

$$\begin{cases} a + c + 2d = 0 \\ b - c + 2d = 0 \\ -2a + c - 7d = 0 \\ a + 3d = 0 \end{cases}$$

En faisant les opérations $L_3 \to L_3 + 2L_1$ et $L_4 \to L_4 - L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & & & c & + & 2d & = & 0 \\ & & b & - & c & + & 2d & = & 0 \\ & & & & 3c & - & 3d & = & 0 \\ & & & & -c & + & d & = & 0 \end{array}\right.$$

$L_3 = -3L_4$ donc les deux lignes sont redondantes et on obtient après résolution :

$$\left\{\begin{array}{rcr} a & = & -3d \\ b & = & -d \\ c & = & d \end{array}\right.$$

Ainsi, avec par exemple $d = 1$, on trouve une solution non nulle du système : la famille est liée, avec par exemple $-3P_1 - P_2 + P_3 + P_4 = 0$ ou encore $P_2 = P_3 + P_4 - 3P_1$

Exercice 11. Montrer que la famille $\mathcal{F} = ((0,5,1),(1,2,1),(1,1,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe a,b,c tels que $(x,y,z) = a(0,5,1) + b(1,2,1) + c(1,1,1) = (0,0,0)$ i.e. résolvons :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & b & + & c & = & x \\ 5a & + & 2b & + & c & = & y \\ a & + & b & + & c & = & z \end{array}\right.$$

On résout via $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3$ puis en échangeant l'ordre des lignes :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & b & + & c & = & z & & \\ & & b & + & c & = & x & & \\ & & -3b & - & 4c & = & y & - & 5z \end{array}\right.$$

Puis via $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} a & + & b & + & c & = & z & & & & \\ & & b & + & c & = & x & & & & \\ & & & - & c & = & y & - & 5z & + & 3x \end{array}\right.$$

On trouve : $c = -3x - y + 5z$ donc $b = x - c = x - (-3x - y + 5z) = 4x + y - 5z$ et enfin $a = z - b - c = z - (4x + y - 5z) - (-3x - y + 5z) = -x + z$. Ainsi, le système admet toujours une solution et $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12 (Bases)**.** Montrer que les espaces suivants sont des espaces vectoriels et déterminer une base de chacun.

1. Fait en classe.
2. $G = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) - xP'(x) = 0\}$
   Montrons que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.
   — Posons $P : x \mapsto 0$ le polynôme nul. $P'(x) = 0$ donc $P(x) - x \times P'(x) = 0 - x \times 0 = 0$. Ainsi $P \in G$.
   — Soient P, Q deux polynômes de G et λ, μ deux réels. Par hypothèse, pour tout réel x, $P(x) - xP'(x) = Q(x) - xQ'(x) = 0$. Alors :
   $$\begin{aligned}(\lambda P + \mu Q)(x) - x(\lambda P + \mu Q)'(x) &= \lambda P(x) + \mu Q(x) - \lambda x P'(x) - \mu x Q'(x) \\ &= \lambda(P(x) - xP'(x)) + \mu(Q(x) - xQ'(x)) \\ &= \lambda \times 0 + \mu \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$
   On en déduit $\lambda P + \mu Q \in G$, donc G est stable par combinaisons linéaires.
   — Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$. Posons a, b, c trois réels tels que $P = ax^2 + bx + c$. Alors, $P \in G$ si et seulement si :
   $$(ax^2 + bx + c) - x(2ax + b) = -ax^2 + c = 0$$
   En identifiant les coefficients, on en déduit $a = c = 0$ et donc $P(x) = bx$, c'est-à-dire $P \in (x \mapsto x)$. Or, la fonction $x \mapsto x$ est non nulle, donc la famille $(x \mapsto x)$ est libre : c'est une base de G.

3. $H = \{P \in \mathbb{R}_5[x] \mid A \text{ divise } P\}$ où $A(x) = x^2 + 5$
   Montrons que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[x]$.
   — Soit P le polynôme nul. P s'écrit $(x^2+5) \times 0$ donc est divisible par x^2+5. Ainsi, $P \in H$
   — Soient P_1, P_2 deux polynômes de H et $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[x]$ tels que $P_1 = (x^2+5)Q_1$ et $P_2 = (x^2+5)Q_2$. Soient λ, μ deux réels.
   Alors
   $$\lambda P_1 + \mu P_2 = \lambda(x^2+5)Q_1 + \mu(x^2+5)Q_2 = (x^2+5)(\lambda Q_1 + \mu Q_2)$$
   Ainsi, $\lambda P_1 + \mu P_2$ est divisible par x^2+5. H est stable par combinaisons linéaires.
   — Soit $P \in \mathbb{R}_5[x]$. Alors, $P \in H$ si et seulement si il existe un quotient Q tel que $P = (x^2+5)Q$. On en déduit que $Q \in \mathbb{R}_3[x]$ (degrés). On peut donc écrire $Q = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ce qui donne :
   $$P(x) = (x^2+5)(ax^3+bx^2+cx+d) = a(x^5+5x^3) + b(x^4+5x^2) + c(x^3+5x) + d(x^2+5)$$
   On a donc une famille génératrice, et libre car de degrés étagés :
   $$(x^5+5x^3; x^4+5x^2; x^3+5x; x^2+5) \text{ est une base de } H$$

Exercice 14 (Fonctions affines)**.** Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les ensembles suivants sont-ils des s.e.v. de E ? Si oui, les écrire sous la forme d'espaces engendrés par une famille de vecteurs.

1. $F_1 = \{x \mapsto ax | a \in \mathbb{R}\}$
   $F_1 = \text{Vect}(x)$
2. $F_2 = \{x \mapsto ax + 1 | a \in \mathbb{R}\}$
   F_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de E puisque la fonction nulle n'est pas de la forme $x \mapsto ax+1$
3. $F_3 = \{x \mapsto ax + b | (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$
   $F_3 = \text{Vect}(x, 1)$

On admet que l'ensemble $G = \{f \in E | f(0) = f(1) = 0\}$ et un sous-e.v. de E. Montrer que $F_3 \oplus G = E$
On peut commencer par montrer que F_3 et G sont en somme directe ($F_3 \cap G = \{0\}$) puis que $F_3 + G = E$.
On propose ici une stratégie reposant sur l'unicité de la décomposition :
Soit $f \in E$. Montrons par analyse synthèse qu'il existe un unique couple $(f_1, f_2) \in F_3 \times g$ tel que $f = f_1 + f_2$
Analyse : Supposons qu'un tel couple existe. Alors, il existe deux réels a, b tels que $f_1(x) = ax + b$. En évaluant en 0 :
$$f(0) = f_1(0) + f_2(0) = b + 0 = b \text{ car } f_2 \in G$$
En 1 :
$$f(1) = f_1(1) + f_2(1) = a + b + 0 \text{ car } f_2 \in G$$
On en déduit : $b = f(0)$ et $a = f(1) - b = f(1) - f(0)$
On a trouvé : $f_1(x) = (f(1) - f(0))\,x + f(0)$
On en déduit : $f_2(x) = f(x) - f_1(x) = f(x) - (f(1) - f(0))x - f(0)$.
Synthèse : Posons $f_1 : x \mapsto (f(1) - f(0))x + f(0)$ et $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$. Montrons que $f_1 \in F_3$ et $f_2 \in G$: f_1 est clairement affine par définition. Par ailleurs, $f_2(0) = f(0) - f_1(0) = f(0) - f(0) = 0$ et $f_2(1) = f(1) - f_1(1) = f(1) - (f(1) - f(0) + f(0)) = 0$. Ainsi, $f_2 \in G$.
La décomposition existe et est unique pour toute fonction f donc $F_3 \oplus G = E$.

Exercice 15. Soient E un espace vectoriel et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que F, G et H sont en somme directe si et seulement si ($F \cap G = \{0\}$ et $(F+G) \cap H = \{0\}$).
Raisonnons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons F, G, H en somme directe (avec la définition «unicité de la décomposition»).
Soit $x \in F \cap G$. Alors $x = x + 0 + 0$ avec $x \in F, 0 \in G, 0 \in H$ et $x = 0 + x + 0$ avec $0 \in F, x \in G, 0 \in H$. Puisque la décomposition sur $F+G+H$ est unique, $x = 0$ (et $0 = x$ et $0 = 0$). On a bien vérifié $F \cap G = \{0\}$.
Soit $x \in (F+G) \cap H$. Alors, puisque $x \in F+G$, il existe $(x_F, x_G) \in F \times G$ tels que $x = x_F + x_G$. Alors, $x = x_F + x_G + 0$ mais aussi $x = 0 + 0 + x$ avec $0 \in F, 0 \in G, x \in H$. Par unicité de la décomposition, $x_F = 0, x_G = 0, x = 0$ et donc puisque $x = 0$, $(F+G) \cap H = \{0\}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $F \cap G = \{0\}$ et $(F+G) \cap H = \{0\}$. Soit $x \in F+G+H$ et supposons qu'il existe $x_F, x_G, x_H, x'_F, x'_G, x'_H$ tels que $x_F + x_G + x_H = x = x'_F + x'_G + x'_H$.
Alors, $(x_F + x_G) - (x'_F + x'_G) = x'_H - x_H$. Puisque ce qui est à gauche est dans $F+G$ et ce qui est à droite

dans H, on en déduit $x'_H - x_H = 0$ i.e. $x'_H = x_H$.
En simplifiant dans $x_F + x_G + x_H = x'_F + x'_G + x'_H$, on obtient $x_F + x_G = x'_F + x'_G$, i.e. $x_F - x'_F = x'_G - x_G$ et donc $x_F - x'_F = 0$ et $x'_G - x_G = 0$.
On peut donc conclure : $x_F = x'_F$, $x_G = x'_G$, $x_H = x'_H$