Devoir Maison n°11 - Développement asymptotique d'une suite d'intégrales

On étudiera dans ce sujet la suite :

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln(x))^n dx$$

Une proposition : avant de chercher à résoudre le problème guidé ci-dessous, essayer sans le découpage en questions d'étudier cette suite : monotonie, limite, trouver une relation de récurrence ... au brouillon !

1. Calculer I_1.
   En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e x^2 \ln(x) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{2e^3+1}{9} \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [1; e]$,

$$\ln(x)^{n+1} \leqslant \ln(x)^n$$

   Pour $x \in [1; e]$, par croissance du logarithme : $\ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(e)$ i.e. $0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1$.
   En multipliant par $\ln(x)^n$, qui est positif :

$$0 \leqslant \ln(x)^{n+1} \leqslant \ln(x)^n$$

   (b) En déduire la monotonie de la suite (I_n) et montrer que la suite converge.
   En gardant l'inégalité de la question précédente, en multipliant par $x^2 \geq 0$ puis en intégrant (par croissance de l'intégrale) :

$$\int_1^e x^2 \times 0 dx \leqslant \int_1^e x^2 \times \ln(x)^{n+1} dx \leqslant \int_1^e x^2 \times \ln(x)^n dx$$

   i.e.

$$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

   Ainsi, (I_n) est une suite décroissante et minorée par 0 donc elle converge.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [1; e]$:

$$0 \leqslant \ln(x) \leqslant \frac{x}{e}$$

   Posons $g : x \mapsto \ln(x) - \frac{x}{e}$ sur $[1; e]$. g est une fonction dérivable et pour tout $x \in [1; e]$,

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex} \geq 0$$

   On en déduit que g est croissante sur $[1; e]$ donc inférieure à sa valeur en e qui est $\ln(e) - \frac{e}{e} = 0$. Ainsi :

$$\forall x \in [1; e], g(x) \leqslant 0 \text{ i.e. } \ln(x) - \frac{x}{e} \leqslant 0 \text{ i.e. } \ln(x) \leqslant \frac{x}{e}$$

   (d) En déduire :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e^3 - e^{-n}}{n+3}$$

Pour tout $x \in [1; e]$,

$$\begin{aligned}
\ln(x) &\leqslant \frac{x}{e} \\
\text{donc } (\ln(x))^n &\leqslant \left(\frac{x}{e}\right)^n \text{ par croissance de la fonction } t \mapsto t^n \\
x^2 \ln(x)^n &\leqslant x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n \text{ car } x^2 \geq 0 \\
\text{et } I_n &\leqslant \int_1^e x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n dx \text{ par croissance de l'intégrale} \\
\text{i.e. } I_n &\leqslant \frac{1}{e^n} \left[\frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_1^e
\end{aligned}$$

On conclut enfin :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{e^n} \frac{e^{n+3} - 1^{n+3}}{n+3} = \frac{e^3 - e^{-n}}{n+3}$$

(e) En déduire la limite de la suite (I_n).
Quand $n \to +\infty$,

$$e^{-n} \to 0 \text{ et } n+3 \to +\infty$$

Par quotient, $\frac{e^3 - e^{-n}}{n+3} \to 0$ et par théorème des gendarmes, $\lim I_n = 0$.
Remarque : en général, j'évite la notation «$\lim$». Ici, c'est acceptable, puisqu'on a démontré plus haut que la limite existait (sans la déterminer).

3. **Développement asymptotique.**

(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer la relation de récurrence :

$$\forall n > 0, I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$

Soit $n > 0$.

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_1^e x^2 \ln(x)^{n+1} dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} \ln(x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times (n+1) \frac{1}{x} \ln(x)^n dx \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}(n+1) \int_1^e x^2 \times \ln(x)^n \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n
\end{aligned}$$

(b) En déduire un programme Python demandant à l'utilisateur un réel strictement positif ε et renvoyant le plus petit entier n tel que $I_n \leqslant \varepsilon$
Pour cette question, même si on s'entraîne à un concours sur feuille, il est largement recommandé de tester ce code sur machine !

```python
from math import exp
eps = float(input("entrez un réel strictement positif"))
n = 1
i = (2*exp(3)+1)/9 #on commence à 1 comme le sujet, on pourrait calculer i_0
while i > eps :
    n = n + 1
    i = exp(3)/3 - n/3*i #parce que j'ai déjà augmenté n
print(n)
```

Remarque : si vous avez testé le code, vous avez peut-être eu une intégrale négative à partir de $n = 27$ ... parce que les petites erreurs de calcul (arrondis) se multiplient à chaque étape par n : une erreur va être à chaque étape multipliée par 20 au bout d'un moment, et donc le calcul numérique s'éloigne de la valeur mathématique !

(c) Déduire de la question 3a la limite, quand n tend vers $+\infty$, de nI_n
De la relation de récurrence, on déduit : $nI_n = 3\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}I_n - I_{n+1}\right) = e^3 - I_n - 3I_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^3$

(d) Déterminer la limite de $n(nI_n - e^3)$ quand n tend vers $+\infty$
Avec la même relation,

$$nI_n - e^3 = -I_n - 3I_{n+1}$$

donc $n(nI_n - e^3) = -nI_n - 3nI_{n+1}$
Or, $nI_n \to e^3$ et $3nI_{n+1} = 3\frac{n}{n+1}(n+1)I_{n+1} \to 3e^3$. On en déduit :

$$n(nI_n - e^3) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -4e^3$$

(e) En déduire enfin l'existence d'une suite (ε_n) telle que $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ telle que pour tout n :

$$I_n = \frac{e^3}{n} - \frac{4e^3}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon_n$$

Ça revient à montrer :

$$\varepsilon_n = n^2\left(I_n - \frac{e^3}{n} + \frac{4e^3}{n^2}\right) \to 0$$

Or,

$$\varepsilon_n = n^2\left(I_n - \frac{e^3}{n} + \frac{4e^3}{n^2}\right) = n(nI_n - e^3) + 4e^3 \to -4e^3 + 4e^3 = 0$$

On écrira dans quelques chapitres : $I_n = \frac{e^3}{n} - \frac{4e^3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *ou de façon moins précise* $I_n \sim \frac{e^3}{n}$