XVI. Semaine 16 : 3-7 février

Contenus :

1. Notion d'application linéaire. Exemples dans tous les espaces vectoriels de référence (fonctions linéaires, applications dans $\mathbb{R}^n$, intégration, dérivation, évaluation en un point, transposée, multiplication par une matrice fixée, etc). Savoir dire si une application est linéaire ou non.
2. Vocabulaire : endomorphismes, isomorphismes, automorphismes, formes linéaires.
3. Composition et binôme de Newton pour des endomorphismes qui commutent
4. Noyau, image d'une application linéaire. Méthode pour montrer qu'un ensemble est un e.v. comme noyau ou image d'une application.
5. Notion de projecteurs. Déterminer l'image, le noyau. Caractérisations. La notion de symétrie, vue en exercice, n'est pas au programme.

Questions de cours :

1. Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto MX$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{n;1}(\mathbb{R})$
2. Si E, F sont des espaces vectoriels, $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.
3. Si u est une application linéaire de E dans F, $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E
4. Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire donnée de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$
5. p est un projecteur si et seulement si p est linéaire et vérifie $p \circ p = p$
6. Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{2;1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{2;1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$
   Montrer que ϕ est un projecteur de $\mathscr{M}_{2;1}(\mathbb{R})$ et déterminer ses espaces caractéristiques.