Feuille d'exercices n°16

Applications linéaires ou non

! **Exercice 1.** Parmi les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f_1 : (x, y, z) \mapsto (y + 3z, 2x + z)$
2. $f_2 : (x, y, z) \mapsto (y + z, x + 2)$
3. $f_3 : (x, y, z) \mapsto (yz, x)$
4. $f_4 : (x, y, z) \mapsto (4x - y, x + y - z)$

Exercice 2. Montrer que l'application suivante est linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

♢ **Exercice 3.** On considère l'application *trace* qui à une matrice $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$ associe :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1. Calculer la trace de quelques matrices particulières. Quelle est la trace de 0_n, de I_n ?
2. Montrer que tr est une forme linéaire.
3. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(tr)$ et $G = \{\lambda I_n | \lambda \in \mathbb{R}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$ en somme directe. *Trouver plusieurs matrices appartenant à F et à G*

Calcul avec des A.L

! **Exercice 4.** Montrer que pour toutes applications linéaires u, v, w telles que tout soit bien défini,

1. $u \circ (v + w) = (u \circ v) + (u \circ w)$
2. $(u + v) \circ w = (u \circ w) + (v \circ w)$

Exercice 5. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
1. Développer $(u + v)^2$
2. Développer $(id - u) \circ (id + u)$
3. Si $u^2 = 0$, montrer que $(id - u)$ est bijective

♢ **Exercice 6.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $2u^2 - u - id_E = 0$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - id_E) \oplus \mathrm{Ker}(2u + id_E)$

Noyau et image, injectivité et surjectivité

♢ **Exercice 7.** Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x - 2y, 3x + y)$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa réciproque.

! **Exercice 8.** On considère l'application f de $\mathbb{R}_3[x]$ dans $\mathbb{R}_3[x]$ qui à tout polynôme P associe $Q = f(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = P(x) + (1 - x)P'(x)$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$. Déterminer $\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(f)$ et en déterminer une base. Montrer finalement :

$$\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_3[x]$$

Exercice 9. On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\Delta : E \to E$ définie pour $u \in E$ par $\Delta(u) = v$ où v est la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. Montrer que Δ est linéaire
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$
3. Montrer que Δ est surjective
4. Expliciter $\Delta^2(u)$ pour tout $u \in E$ (Rappel : $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$)
5. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\Delta^2)$

Exercice 10. Soit n un entier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
1. Montrer que $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$ est linéaire
2. Si A est inversible, montrer que f est un automorphisme et préciser sa réciproque.

Exercice 11. Quel est le noyau de l'application linéaire $P \mapsto P - XP'$ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$?

Applications particulières : projecteurs, symétries, homothéties

! **Exercice 12.** Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(1) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que F et G sont des s-e.v. supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. Déterminer le projecteur sur F parallèlement à G

$\diamondsuit$ **Exercice 13.** Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2;1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2;1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$

Montrer que ϕ est un projecteur de $\mathcal{M}_{2;1}(\mathbb{R})$ et déterminer ses espaces caractéristiques.

Exercice 14. Soit s un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = id_E$

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $x + s(x) \in \mathrm{Ker}(s - id_E)$ et $x - s(x) \in \mathrm{Ker}(s + id_E)$
2. En déduire que $\mathrm{Ker}(s - id_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + id_E)$ sont supplémentaires
3. En déduire que s est une symétrie dont on précisera les caractéristiques.

Exercice 15. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ soit liée.

1. Montrer que si $x \neq 0$, il existe un unique réel λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$
2. Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est libre.
3. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$
   On dit alors que f est une homothétie

Exercice 16. Soient p, q deux projecteurs d'un même ensemble E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$
2. Montrer que dans ce cas : $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$
3. Montrer que dans ce cas : $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$

Exercices corrigés

Exercice 1. 1. f_1 est linéaire : si on prend $(x, y, z), (x', y', z')$ dans $\mathbb{R}^3$ et λ, μ deux réels :

$$\begin{aligned} f_1(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')) &= f_1((\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z')) \\ &= (\lambda y+\mu y'+3(\lambda z+\mu z'); 2(\lambda x+\mu x')+(\lambda z+\mu z')) \\ &= (\lambda(y+3z)+\mu(y'+3z'); \lambda(2x+z)+\mu(2x'+z')) \\ &= \lambda(y+3z, 2x+z)+\mu(y'+3z', 2x'+z') \\ &= \lambda f_1((x,y,z))+\mu f_2((x',y',z')) \end{aligned}$$

2. f_2 n'est pas linéaire - contre-exemple : $f_2(0,0,0) = (0,2)$ et $f_2(2(0,0;0)) \neq 2f_2(0,0,0)$
3. f_3 n'est pas linéaire : $f(1,1,1) = (1,1)$ et $f(2,2,2) = (4,2) \neq 2(1,1)$
4. f_4 est linéaire : si on prend $(x, y, z), (x', y', z')$ dans $\mathbb{R}^3$ et λ, μ deux réels :

$$\begin{aligned} f_1(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')) &= f_1((\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z')) \\ &= (4(\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\lambda y'); (\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y')-(\lambda z+\mu z')) \\ &= (\lambda(4x-y)+\mu(4x'-y'); \lambda(x+y-z)+\mu(x'+y'-z')) \\ &= \lambda f_4((x,y,z))+\mu f_4((x',y',z')) \end{aligned}$$

Exercice 4. On appellera E l'ensemble de définition de v et w dans la première question et de w dans la deuxième question.

1. Soit $x \in E$.

$$u \circ (v+w)(x) = u((v+w)(x)) = u(v(x)+w(x)) = u(v(x))+u(w(x)) \text{ car } u \text{ est linéaire}$$

Finalement $(u \circ (v+w))(x) = u(v(x)) + u(w(x)) = (u \circ v + u \circ w)(x)$
L'égalité étant vraie pour tout x, $u \circ (v+w) = (u \circ v) + (u \circ w)$

2. Soit $x \in E$.

$$((u+v) \circ w)(x) = u(w(x)) + v(w(x)) = ((u \circ w) + (v \circ w))(x)$$

Puisque l'égalité est vraie pour tout x, $(u+v) \circ w = (u \circ w) + (v \circ w)$. On remarque que celle-ci est vraie pour toutes applications et pas seulement linéaires.

Exercice 8. On prend P_1, P_2 dans $\mathbb{R}_2[x]$ et λ, μ des réels.

$$f(\lambda P_1+\mu P_2) = (2x+1)(\lambda P_1+\mu P_2)-(x^2-1)(\lambda P_1+\mu P_2)' = \lambda((2x+1)P_1-(x^2-1)P_1')+\mu((2x+1)P_2-(x^2-1)P_2') = \lambda f(P_1)+\mu f(P_2)$$

Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$ et a, b, c tels que $P = ax^2 + bx + c$. $P \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (2x+1)(ax^2+bx+c) - (x^2-1)(2ax+b) = 0$$

En développant : $(2ax^3 + ax^2 + 2bx^2 + bx + 2cx + c) - (2ax^3 + bx^2 - 2ax - b) = 0$, donc :

$$(a+b)x^2 + (b+2c+2a)x + (c+b) = 0$$

En identifiant les coefficients :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b + 2c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

Exercice 12. 1. F et G sont bien inclus dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si f est constante et que $f(1) = 0$, alors $f = 0$. Finalement, si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $f_1 = f(1)$, $f_2 = f - f(1)$, alors $f_1 \in G, f_2 \in F$ et $f_1 + f_2 = f$ donc $F + G = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2. Ce projecteur est $f \mapsto f_2$ de la question précédente :

$$f \mapsto f - f(1) \quad \text{i.e.} \quad f \mapsto (x \mapsto f(x) - f(1))$$