Chapitre 16 : Applications linéaires

Algèbre 4

Cadre : Dans ce qui suit, E et F désignent des espaces vectoriels. Après avoir étudié ces ensembles, on étudie les applications qui se comportent bien avec leur structure particulière.

I. Ensembles d'applications linéaires

1. Définitions

Définition 1. On appelle **application linéaire** de E dans F une application $u : E \to F$ telle que :

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(x,y) \in E^2, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

Exemples (d'applications linéaires)**.**

- Les **fonctions linéaires** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- La transposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y-z, y+z, x-3y) \end{array}$
- L'application de dérivation de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0$
- L'application qui à une fonction continue f associe son intégrale entre 0 et 1
- Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $m_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$

Propriété 2. Une application linéaire vérifie toujours $u(0_E) = 0_F$.
*C'est une méthode efficace pour montrer qu'une application **n'est pas** linéaire.*

Exemple. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x+1 \end{array}$ n'est pas une application linéaire.

♣ *Remarque.* On peut aussi utiliser les définitions équivalentes suivantes (démonstration laissée en exercice) :

1. Somme et multiplication : $\forall\lambda \in \mathbb{R}, (x,y) \in E^2, u(\lambda x) = \lambda u(x)$ et $u(x+y) = u(x) + u(y)$
2. Combinaison linéaire : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \forall(x_1,\dots,x_n) \in E^n, u\left(\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i u(x_i)$

Définition 3 (Vocabulaire)**.** L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$. L'ensemble des applications linéaires de E dans E est noté $\mathcal{L}(E)$: on appelle ces applications linéaires des **endomorphismes**. L'ensemble des applications linéaires **bijectives** de E dans F est noté $\mathcal{GL}(E,F)$: on les appelle **isomorphismes**. Les applications bijectives de E dans E sont appelées **automorphismes** (endo + iso = auto). Une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ est appelée **forme linéaire**.

Exemple (Central)**.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$.
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$. À quelle condition est-ce un automorphisme ?

2. Opérations

Propriété 4 (Somme, multiplication par un réel)**.** Les ensembles $\mathcal{L}(E,F)$ sont des espaces vectoriels, c'est-à-dire qu'une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire.

Propriété 5 (Composition)**.** Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$, c'est-à-dire que la composée de deux applications linéaires est linéaire.

Démonstration. Des exemples de preuves automatiques !

Remarque. Si $f \in \mathcal{GL}(E,F)$ et $g \in \mathcal{GL}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{GL}(E,G)$. En revanche, $\mathcal{GL}(E,F)$ n'est **pas** un espace vectoriel !

Définition 6 (Notation puissance)**.** Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors on peut définir par récurrence :

- $f^0 = id_E$
- $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f \circ f^n$

Propriété 7 (Encore Newton)**.** Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ vérifient $f \circ g = g \circ f$, alors

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k}$$

Propriété 8 (Inverse)**.** Si $f \in \mathcal{GL}(E,F)$, alors $f^{-1} \in \mathcal{GL}(F,E)$, c'est-à-dire que l'application réciproque est également linéaire.

Démonstration.

II. Image et noyau d'une application linéaire

Dans cette section, on note $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire.

1. Noyau

Définition 9. On définit le **noyau** de u, noté $\mathrm{Ker}(u)$, l'ensemble :

$$\mathrm{Ker}(u) = u^{-1}(\{0\}) = \{x \in E | u(x) = 0_F\}$$

♡ **Propriété 10.** $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration.

Remarque. C'est une façon efficace de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Exemple. Montrer que $\{f \in \mathcal{C}^0([0;1]) | \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ est un espace vectoriel.

Propriété 11. u est injective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$

Démonstration.

Exemple. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (5x+y, x-y+2z) \end{array}$ est-elle injective ?

2. Image

Définition 12. On appelle **image** de u, noté $\mathrm{Im}(u)$, l'ensemble :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(u) = u(E) &= \{u(x) | x \in E\} \\ &= \{y \in F | \exists x \in E, u(x) = y\} \end{aligned}$$

Exemple. Déterminer l'image de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M \mapsto {}^tM + M$

Propriété 13. $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F

Démonstration.

Propriété 14. u est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(u) = F$ (c'est la définition)

Exemple. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{array}$ est-elle surjective ?

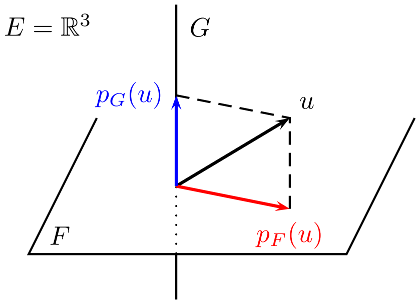
III. Des applications particulières

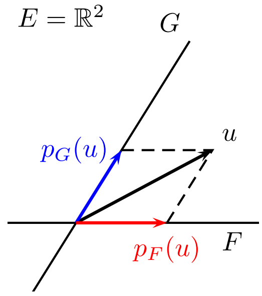
1. Projecteurs

Définition 15. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Tout élément u de E se décompose de manière unique sous la forme $u = u_F + u_G$ avec $(u_F, u_G) \in F \times G$.
L'application $p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u_F \end{array}$ est alors appelée **projecteur sur F parallèlement à G.**

Exemple. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,0,0))$.
Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ et déterminer les projecteurs p_F et p_G associés.

Illustration :
Notons p_F le projecteur sur F parallèlement à G et p_G le projecteur sur G parallèlement à F.





Propriété 16. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors,

1. $p \in \mathcal{L}(E)$
2. $F = \text{Im } p = \text{Ker}(p - id_E)$
3. $G = \text{Ker } p$

Remarque. $\text{Ker}(p - id_E)$ est aussi parfois noté $Fix(p)$: c'est l'ensemble des points fixes (ou plutôt des vecteurs fixes) de p

Démonstration.

Remarque. Ainsi, les éléments de F sont les éléments de E vérifiant $p(u) = u$. On a donc $p_{|F} = id_F$.
Les éléments de G sont les éléments de E vérifiant $p(u) = 0_E$. On a donc $p_{|G} = 0$.

♡ **Propriété 17** (Caractérisation des projecteurs)**.** Soit $p : E \to E$ une application.

♡
1. p est un projecteur si et seulement si $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$.
   Dans ce cas, $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et p est le projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.
2. p est un projecteur si et seulement si $E = \text{Ker}(p - id_E) \oplus \text{Ker}(p)$

Démonstration.

Exemple. Montrer que $p : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \end{array}$ est un projecteur que l'on précisera.

Remarque. Si $E = F \oplus G$, notons p_F le projecteur sur F parallèlement à G et p_G le projecteur sur G parallèlement à F. On a alors :

- $p_F + p_G = id_E$
- $p_F \circ p_G = 0 = p_G \circ p_F$

♠ 2. Pour aller plus loin : symétries

Définition 18. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.
Tout vecteur u de E admet une unique décomposition $u = u_F + u_G$, avec $(u_F, u_G) \in F \times G$.
L'application $s : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u_F - u_G \end{array}$ est alors appelée **symétrie par rapport à F parallèlement à G**

Remarque. Si $u \in F$, $s(u) = u$. Et réciproquement ?

Propriété 19 (Caractérisation des symétries)**.** Soit s une symétrie de E. Alors, s est un automorphisme de E tel que $s \circ s = id_E$, i.e. $s^{-1} = s$

Démonstration.

Exemple. Montrer que $M \mapsto {}^tM$ est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Illustration : Projection de u sur F parallèlement à G et symétrie de u par rapport à F, parallèlement à G