Devoir Maison n°12 - issu du cahier de vacances de Frédéric Gaunard

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On prélève au hasard ces n boules une par une et sans remise (jusqu'à vider l'urne). À la suite de cette expérience, on note pour tout $i \in [|1;n|]$, u_i le numéro de la boule obtenue au cours du $i-$ème tirage. Pour $i \in [|2;n|]$, on dit qu'il y a un record au i-ème tirage si :

$$u_i > \max\{u_1, \ldots, u_{i-1}\}$$

On introduit :

— Pour tout $i \in [|1;n|]$, l'événement R_i «il y a un record au i-ème tirage»

— Pour tout $i \in [|1;n|]$, la variable aléatoire T_i qui prend la valeur de la boule obtenue au i-ème tirage.

Par convention, $\mathbb{P}(R_1) = 1$

Simulation avec Python.

L'urne est représentée par une liste de numéros de boules, et cette liste est modifiée après chaque tirage d'une boule.
La commande `rd.randint(a,b)` renvoie un nombre entier, choisi au hasard uniformément entre a et $b-1$.

1. Recopier et compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie un terme de la liste tiré au hasard et la liste mise à jour :

```
def selection(L):
    n = len(L) #longueur de la liste
    k = rd.randint(0,n)
    x = L[k]
    del(L[k]) #enlever x de la liste L
    return (x,L)
```

2. En utilisant la fonction précédente, recopier et compléter la fonction suivante qui permet de simuler toute l'expérience et renvoyer la liste ordonné des numéros des boules piochées :

```
def pioche(n):
    U = [k for k in range(1,n+1)] #Urne avant la première pioche
    # ou list(range(1,n+1))
    T = []
    for k in range(n) :
        x, U = selection(U) #résultat après un tirage
        T.append(x)
    return T
```

3. Écrire alors une fonction d'en-tête `def X(n) :` qui utilise la fonction `pioche` ci-dessus pour effectuer les n pioches successives et renvoyer le nombre de records.

```
def X(n):
    T = pioche(n)
    r = 0 #nombre de records
    m = 0 #maximum actuel
    for k in range(n):
        if T[k] > m: #on a un record
            m = T[k] #nouveau record
            r = r + 1
    return r
```

Un record au i-ème tirage

On modélise l'expérience par l'ensemble Ω des n-uplets de numéros de boules piochées. On considère $\mathbb{P}$ une probabilité uniforme.

1. Quel est le cardinal de Ω ?
   Puisqu'il n'y a pas de remise, il y a n choix pour la première boule, $n-1$ pour la deuxième, $n-2$ pour la troisième ... $|\Omega| = n!$
2. Combien y a-t-il de tirages de n boules successivement sans remise dont la dernière boule est celle numérotée n ?
   Sachant que la dernière boule est la numéro n, il y a $(n-1)!$ possibilités pour les $n-1$ premiers tirages.

3. En déduire $\mathbb{P}(R_n)$

   Au dernier tirage, il y a un record si et seulement si la dernière boule tirée a un numéro plus grand que toutes les autres boules, c'est-à-dire si la boule n est tirée au dernier rang :

$$\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(T_n) = \frac{|T_n|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

4. Soit $i \in [|2; n|]$.

   (a) Que vaut $\mathbb{P}(R_i \cap [T_i = k])$ pour $k \in [|1; i-1|]$?

   C'est la probabilité qu'il y ait un record au rang i en tirant la boule $k < i$. Puisqu'il faut que les $i-1$ tirages précédents soient tous différents et tous strictement inférieurs à k, $\mathbb{P}(R_i \cap [T_i = k]) = 0$ dans le cas $k \in [|1; i-1|]$

   (b) Justifier que pour tout $k \in [|1; n|]$, $R_i \cap [T_i = k] = \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} (T_j < k)\right) \cap (T_i = k)$

   Il y a un record au rang i avec $T_i = k$ si et seulement si à tous les rangs précédents, le tirage était strictement inférieur à k, d'où l'écriture proposée.

   (c) Montrer :

$$\mathbb{P}(R_i \cap (T_i = k)) = \frac{(k-1)!}{(k-i)!} \times \frac{(n-i)!}{n!}$$

   On utilise l'écriture de la question précédente. En utilisant la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_i \cap [T_i = k]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} (T_j < k)\right) \cap (T_i = k)\right) \\
&= \mathbb{P}(T_1 < k)\mathbb{P}_{T_1<k}(T_2 < k) \times \ldots \times \mathbb{P}_{T_1<k,\ldots,T_{i-2}<k}(T_{i-1} < k) \times \mathbb{P}_{T_1<k,\ldots,T_{i-1}<k}(T_i = k) \\
&= \frac{k-1}{n} \times \frac{k-2}{n-1} \times \ldots \times \frac{k-(i-1)}{n-(i-2)} \times \frac{1}{n-(i-1)} \\
&= \frac{(k-1) \times (k-2) \times \ldots \times 1}{(k-i) \times (k-i-1) \times \ldots \times 1} \times \frac{(n-i) \times (n-i-1) \times \ldots \times 1}{n \times (n-1) \times \ldots \times 1} \\
&= \frac{(k-1)!(n-i)!}{(k-i)!n!}
\end{aligned}$$

   (d) En déduire :

$$\mathbb{P}(R_i) = \frac{1}{i} \sum_{k=i}^{n} \frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n}{i}}$$

   En utilisant la loi des probabilités totales dans le système complet d'événements associé à T_i :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_i) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R_i \cap [T_i = k]) \\
&= \sum_{k=i}^{n} \mathbb{P}(R_i \cap [T_i = k]) \text{ d'après la question 4a} \\
&= \sum_{k=i}^{n} \frac{(k-1)!}{(k-i)!} \times \frac{(n-i)!}{n!} \text{ d'après la question précédente} \\
&= \sum_{k=i}^{n} \frac{(k-1)!}{(k-1-(i-1))!(i-1)!} \times \frac{(i-1)!(n-i)!}{n!} \\
&= \frac{1}{i} \sum_{k=i}^{n} \frac{(k-1)!}{(k-1-(i-1))!(i-1)!} \times \frac{i!(n-i)!}{n!} \\
&= \frac{1}{i} \sum_{k=i}^{n} \frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n}{i}}
\end{aligned}$$

   (e) Justifier :

$$\sum_{k=i+1}^{n} \left(\binom{k}{i} - \binom{k-1}{i}\right) = \binom{n}{i} - 1$$

On reconnait une somme télescopique :

$$\sum_{k=i+1}^{n}\left(\binom{k}{i}-\binom{k-1}{i}\right)=\binom{n}{i}-\binom{i+1-1}{i}=\binom{n}{i}-1$$

(f) En déduire enfin : $\mathbb{P}(R_i)=\frac{1}{i}$
Rappelons la formule de récurrence du binôme de Pascal : pour tout $k\geq 1$ et $i\leq k-1$ (i.e. $k\geq i+1$),

$$\binom{k}{i}=\binom{k-1}{i}+\binom{k-1}{i-1}$$

On reformule : $\binom{k-1}{i-1}=\binom{k}{i}-\binom{k-1}{i}$. Grâce aux questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_i)&=\frac{1}{i}\sum_{k=i}^{n}\frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n}{i}}\\
&=\frac{1}{i}\times\frac{1}{\binom{n}{i}}\times\sum_{k=i}^{n}\binom{k-1}{i-1}\\
&=\frac{1}{i}\times\frac{1}{\binom{n}{i}}\times\left(\binom{i-1}{i-1}+\sum_{k=i+1}^{n}\binom{k}{i}-\binom{k-1}{i}\right)\\
&=\frac{1}{i}\times\frac{1}{\binom{n}{i}}\times\left(1+\binom{n}{i}-1\right)\\
&=\frac{1}{i}\times\frac{\binom{n}{i}}{\binom{n}{i}}\\
&=\frac{1}{i}
\end{aligned}$$